

NUMERISCHE BEHANDLUNG VON
LOCHPROJEKTIONEN
IN DER COMPUTER-TOMOGRAPHIE

ALEXANDER BARTMANN

1985

Diss
München

Aus dem Institut für Medizinische Informationsverarbeitung,
Statistik und Biomathematik
Vorstand : Prof. Dr. med. Dipl.-Psych. Karl Überla

*Numerische Behandlung
von
Lochprojektionen
in der
Computer-Tomographie*

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde in der Zahnheilkunde
an der Ludwig Maximilians-Universität zu München

vorgelegt von
Alexander Bartmann
aus München

München, 1985

Mit Genehmigung der Medizinischen Fakultät
der Universität München

Berichterstatter : Prof. Dr. H.-K. Selbmann

Mitberichterstatter : Prof. Dr. K. Überle

Dekan : Prof. Dr. W. Spann

Tag der mündlichen Prüfung : 19.12.1985

I n h a l t

Medizinische Problemstellung und Übersicht	1
Kapitel I : Einführung	
§ 1 : Bildrekonstruktion aus Projektionen	4
§ 2 : Lochprojektionen in der Computer - Tomographie ..	7
§ 3 : Ansätze zur Behandlung von Lochprojektionen	10
Kapitel II : Theoretische Grundlagen	
§ 4 : Grundidee des Verfahrens	13
§ 5 : Konsistenzbedingungen	16
§ 6 : Ein Ansatzraum zur konsistenten Ergänzung	20
Kapitel III : Praktische Realisierung	
§ 7 : Überblick	34
§ 8 : Objekterkennung	39
§ 9 : Berechnung der Koeffizienten für die konsistente Ergänzung	43
Kapitel IV : Numerische Ergebnisse	
§ 10 : Test der Konsistenzbedingungen	48
§ 11 : Erprobung des Verfahrens	61
§ 12 : Kritische Würdigung und Weiterentwicklungsmöglichkeiten	74
Zusammenfassung	76
Literatur	77



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554004_0081

Medizinische Problemstellung und Übersicht

Ausgehend von Arbeiten ([2], [3]) des späteren Nobelpreisträgers für Medizin A. M. Cormack wurde in den letzten 20 Jahren die Computer - Tomographie entwickelt.

Zur Ergänzung der üblichen Projektionsbilder bestand in der Röntgendiagnostik das Bedürfnis nach Schichtbildern. Durch geschickte Bewegung von Strahlenquelle und Film bzw. Patient und Film während der Exposition kann man erreichen, daß Objekte außerhalb der gewünschten Schicht auf der Aufnahme verwischt werden. Nach diesem Prinzip arbeiten auch die Orthopantomographen, die dem Zahnarzt einen Überblick über das gesamte Zahnsystem und seine Umgebung bis hinauf zur Orbita geben.

Die Computer - Tomographie ist eine rechnergestützte Perfektionierung der Verwischungstechnik. Bei heutigen Computer - Tomographen kreisen um den Patienten eine Röntgenröhre und auf einem Kreisbogen angeordnete Detektoren, die das Maß der Abschwächung des Röntgenstrahles beim Durchdringen des menschlichen Körpers für viele verschiedene Stellungen der Röhre erfassen. Aus diesen Werten wird mit Hilfe des sogenannten Faltungsalgorithmus innerhalb weniger Sekunden ein Bild errechnet, das ungefähr die Dichteverhältnisse des Gewebes in einer Schicht widerspiegelt.

Diese Bildrekonstruktion wird in §1 genauer beschrieben. Liegen in der untersuchten Schicht jedoch Metallgegenstände, wie z.B. ein Herzschrittmacher, eine Endoprothese oder Zahnkronen, so erhält man bei sofortiger Anwendung des Faltungsalgorithmus starke Artefakte. Besonders häufig tritt dieses Problem bei Coronarschnitten (bei ca. 50% aller Patienten) auf. Als Notbehelf wird in einem solchen Fall die Neigung der Gantry, d.h. der Neigungswinkel der Schicht, solange verändert, bis keine Zahnkronen mehr getroffen werden.

Die Artefakte kann man klassifizieren in tangential zum Metallgegenstand verlaufende Streifen und großflächige Strukturen,

die vom Betrachter nicht mehr als Artefakt zu identifizieren sind.

Erstere werden durch Abtastfehler erzeugt, die hier durch den enormen Dichteunterschied zwischen Metall und Gewebe besonders groß sind.

Letztere sind vor allem auf die Strahlungsaufhärtung zurückzuführen, denn der Metallgegenstand absorbiert vor allem die energiearmen Teile des polychromatischen Röntgenstrahles. Da der Schwächungskoeffizient des Gewebes aber u.a. vom Spektrum des Röntgenstrahles abhängt, wird so die Messung verfälscht, und es entstehen im Bild großflächige Strukturen, die das menschliche Auge nicht mehr als Artefakte erkennen kann. Eine ähnliche Wirkung auf das Bild hat die Bewegung einzelner Organe (z.B. Herzschlag) während der Messung.

Verzichtet man auf solche gestörten Daten bei der Bildrekonstruktion, so spricht man von Lochprojektionen. Es wurden bereits viele Versuche unternommen, aus Lochprojektionen ein Bild zu berechnen. Eine Übersicht über diese bisher wenig erfolgreichen Ansätze ist in § 3 zu finden.

Aufbauend auf meiner mathematischen Diplomarbeit [1] wird hier in § 4 - § 9 ein Verfahren beschrieben, mit dem die gestörten oder fehlenden Daten verbessert bzw. ergänzt werden, um anschließend das Bild mit dem Faltungsalgorithmus aus dem modifizierten Datensatz zu erzeugen.

In [1] standen theoretische Überlegungen im Vordergrund, insbesondere Konvergenzuntersuchungen mit Hilfe der Sobolewnormen gebrochener Ordnung. Darauf wird hier gänzlich verzichtet. Statt dessen hat die praktische Durchführung und Realisierung auf einem kommerziellen Computer - Tomographen (Somatom DR 3 der Firma Siemens) Priorität.

In allen mir bekannten Veröffentlichungen wurde davon ausgegangen, daß der Metallgegenstand zentral liegt und kreisförmig im Querschnitt ist. Dies ist freilich in keiner Weise realistisch. Anlaß für diese Annahme ist die damit verbundene erhebliche Vereinfachung sowohl theoretischer als auch praktischer Art. Hier wird versucht, das Problem auch für Metall-

gegenstände beliebiger Lage und Form zu lösen.

Dazu waren erhebliche Modifikationen und Verbesserungen des Verfahrens in [1] nötig. Völlig neu ist das Problem der

Objekterkennung hinzugekommen, das in § 8 behandelt wird.

Im Gegensatz zu allen früheren Ansätzen besteht hier die Möglichkeit, die gestörten Daten als Informationsquelle mitzuverwenden. Ersetzt man diese Daten wie bisher üblich zunächst durch Interpolation, so verschwinden zwar die scharfen Streifen teilweise, es ergeben sich jedoch Artefakte, die großflächig sind und nicht vorhandene Strukturen vortäuschen.

Das hier entwickelte Verfahren richtet sich insbesondere gegen diese Artefakte, die vom menschlichen Auge nicht unmittelbar als solche erkannt werden können und damit für die Diagnostik eine wesentlich größere Gefahr darstellen, als radial verlaufende Streifen.

Diese Aspekte werden in § 10 - § 12 genauer untersucht.

Meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Selbmann danke ich herzlich für sein stetes Interesse am Fortgang der Arbeit und viele fruchtbare Diskussionen,

Herrn Prof. Dr. Lissner und Herrn Oberarzt Dr. Mayr für die Möglichkeit, den Computer - Tomographen der radiologischen Poliklinik Innenstadt für meine Untersuchungen benutzen zu können und den Mitarbeitern der radiologischen Poliklinik Innenstadt für ihre wohlwollende Hilfe.

Außerdem gilt mein Dank der Siemens AG für die kontinuierliche Unterstützung meiner Arbeit.

Kapitel I : Einführung

Dieses Kapitel beschreibt die Funktionsweise heutiger Computer - Tomographen. Dabei wird insbesondere auf die Problematik der Lochprojektionen und verschiedene Ansätze zu deren Behandlung eingegangen.

§ 1 Bildrekonstruktion aus Projektionen

Gewöhnliche Röntgenapparate liefern Projektionsbilder, die keine Information über die räumliche Anordnung der sich auf der Aufnahme überlagernden Objekte beinhalten. Um diesen Nachteil zu lindern, fertigt man Aufnahmen aus verschiedenen Richtungen an.

Eine Alternative ist die Tomographie, eine Schichtaufnahmetechnik. Durch geschickte Bewegung von Strahlenquelle und Film bzw. Patient und Film erreicht man, daß lediglich die in der interessierenden Schicht gelegenen Strukturen während des Bewegungsvorganges immer auf dieselbe Stelle des Filmes abgebildet werden. Objekte, die außerhalb dieser Schicht liegen, werden auf der Aufnahme verwischt. Dies hat freilich negativen Einfluß auf Schärfe und Auflösung des Bildes.

Die Computer - Tomographie ist eine Kombination und Weiterentwicklung der beiden eben beschriebenen Techniken.

Der Patient wird aus einer großen Zahl von Richtungen durchleuchtet. Für die numerische Datenverarbeitung werden diese Projektionen nicht auf einen Film abgebildet, sondern durch Detektoren erfaßt. Aus diesen Meßwerten können vom Computer Schichtbilder errechnet werden.

Dazu wird der sogenannte Faltungsalgorithmus verwendet.

Die Meßdaten werden zunächst durch eine Faltung mit geeigneten Funktionen gefiltert. Eine anschließende Rückprojektion liefert das gewünschte Bild. In der amerikanischen Literatur trägt der Faltungsalgorithmus daher den Namen "filtered backprojection". Diese rechnerische Rückprojektion entspricht der in der herkömmlichen Tomographie verwendeten

Verwischungstechnik, geht jedoch von vorbehandelten Daten aus, die nicht durch Objekte aus anderen Schichten gestört sind, und führt daher zu weitaus besseren Ergebnissen. Der Faltungsalgorithmus wurde von Ramachandran und Lakshminarayanan [27] unter Verwendung einer Formel von Radon [25] entwickelt. Lewitt [11] zeigte, wie man dieses Verfahren effizient implementieren kann.

Allen mathematischen Überlegungen in der Computer - Tomographie liegt die Radontransformation zugrunde. Sei f eine auf $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion, die lediglich auf dem Einheitskreis von Null verschiedene Werte annimmt. Dann ist ihre Radontransformierte Rf definiert als

$$Rf(s, \varphi) := \int_{\mathbb{R}} f(s\omega + t\omega^\perp) dt \quad \text{für alle } s, \varphi \in \mathbb{R},$$

wobei $\omega := (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ den zum Winkel φ gehörigen Einheitsvektor darstellt, auf dem $\omega^\perp := (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$ orthogonal steht.

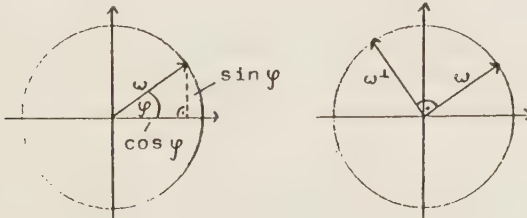
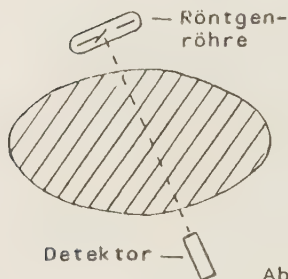


Abb. 1.1

Es wird also f längs einer durch s und φ beschriebenen Geraden integriert. Dieses Integral entspricht der Größe $\ln(I_0/I)$, wobei I_0 und I die Intensitäten eines durch diese Gerade in seiner Lage bestimmten Röntgenstrahles vor bzw. nach Durchdringen des Patienten angeben. Die Funktion f repräsentiert dabei die "Dichte" des Gewebes in einer Schicht.

Meßanordnung



Mathematisches Modell

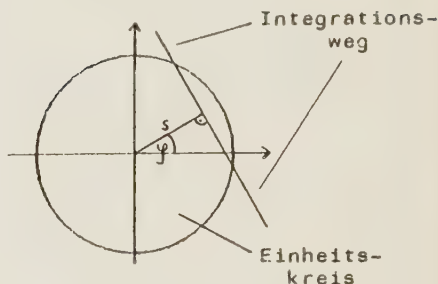


Abb. 1.2.

Um exakte mathematische Überlegungen anstellen zu können, muß man an f gewisse Forderungen stellen. Zumindest sollte f im Funktionenraum $L^2(\mathbb{R}^2)$ liegen, d.h. der Ausdruck

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx$$

sollte definiert und endlich sein. Damit ist die Existenz fast aller obigen Linienintegrale gesichert.

Nach Natterer [20] ist es sinnvoll, $f \in H_0^\alpha(\mathbb{R}^2)$ mit $\alpha < \frac{1}{2}$ anzunehmen. Der Sobolewraum $H_0^\alpha(\mathbb{R}^2)$ der Ordnung α umfaßt alle jene Funktionen f , für die

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |x|^2)^\alpha |\hat{f}(x)|^2 dx$$

mit

$$\hat{f}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\langle x, y \rangle} f(y) dy$$

definiert und endlich ist. Diese Sobolewräume sind ein wertvolles Werkzeug zur Behandlung von Konvergenzfragen.

§ 2 Lochprojektionen in der Computer - Tomographie

Liegen im Untersuchungsgebiet Metallgegenstände, wie z.B. ein Herzschrittmacher, eine Endoprothese oder Zahnkronen, so erhält man Lochprojektionen.

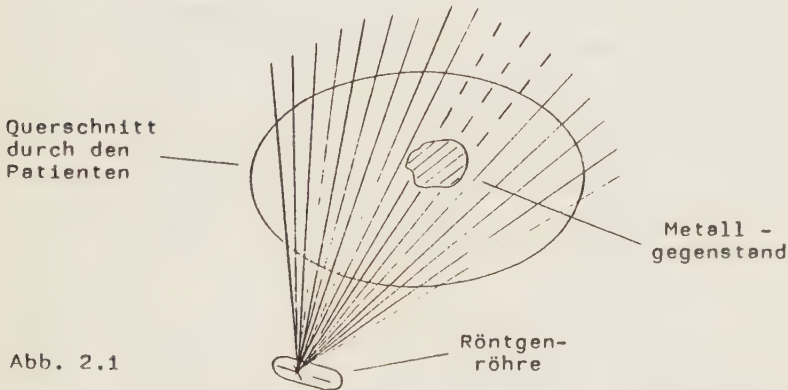


Abb. 2.1

Massive Metallgegenstände absorbieren die Strahlung weitgehend. Damit wird der für die weitere Rechnung benötigte Wert $\ln(I_0/I)$ (vgl. § 1) sehr groß. Da hier die am Detektor gemessene Intensität I im Vergleich zur Ausgangsintensität I_0 sehr klein ist, führt die statistische Streuung zu einem besonders großen relativen Meßfehler. Ein weiterer sich störend auswirkender Effekt ist die Strahlungsaufhärtung. Der Meßstrahl ist nicht monochromatisch, und durch den Metallgegenstand werden bevorzugt die energieärmeren Anteile der Strahlung absorbiert. Das in § 1 erläuterte mathematische Modell ist für diese Situation nicht mehr brauchbar.

Da in die Berechnung eines Bildpunktes sämtliche Meßwerte eingehen, zerstören diese großen und ungenauen Daten das gesamte Bild.

Die unmittelbare Anwendung eines Standardrekonstruktionsverfahrens, wie des Faltungsalgorithmus, führt zu Artefakten in Form von Ringen und radial verlaufenden Streifen.

Der Versuch, solche Störungen nachträglich aus einem Bild rechnerisch zu entfernen, ist hoffnungslos, da durch die Rekonstruktion Information verlorenggeht. Nichtsdesto-
weniger kann man durch eine derartige "Bildkosmetik" für das menschliche Auge ansprechendere Bilder erzeugen.
In dieser Arbeit wird gezeigt, wie man durch geschicktes Manipulieren der Meßwerte diese Störungen von vornherein weitgehend vermeiden kann.

Im mathematischen Modell bedeuten Lochprojektionen, daß nur jene Linienintegrale bekannt sind, deren Integrationswege ein im Innern des Einheitskreises gelegenes Gebiet G nicht schneiden. Unter einem Gebiet sei eine offene und zusammenhängende Menge verstanden.



Abb. 2.2

Wie die folgenden Überlegungen zeigen, ist es sinnvoll, die Betrachtungen auf ein konvexes Gebiet zu beschränken. Denn eine Gerade g schneidet genau dann die konvexe Hülle $co(G)$ eines Gebietes G , wenn sie G selbst schneidet. Dabei ist die konvexe Hülle eines Gebietes G die eindeutig bestimmte kleinste konvexe Obermenge von G .

Sie läßt sich darstellen in der Form

$$co(G) = \{ \lambda x + (1-\lambda) y : x, y \in G, 0 \leq \lambda \leq 1 \} .$$

Zunächst ist klar, daß eine Gerade g , die G schneidet, erst recht einen Schnittpunkt mit $co(G)$ besitzt.

Ist umgekehrt z ein Schnittpunkt von g und $\text{co}(G)$, so gibt es $x, y \in G$ und λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$, sodaß $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Entweder liegen nun x und y beide auf der Gerade g , d.h. $g \cap G \neq \emptyset$, oder sie liegen auf verschiedenen Seiten von g .

Im letzteren Fall verläuft ein Weg γ von x nach y innerhalb von G , da G zusammenhängend ist. Dieser besitzt einen Schnittpunkt mit g .

Also folgt aus $g \cap \text{co}(G) \neq \emptyset$, daß auch $g \cap G \neq \emptyset$ gilt.

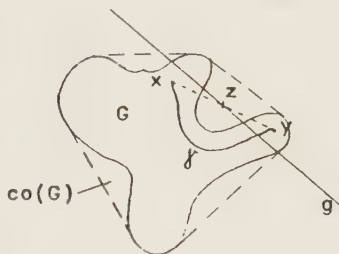


Abb. 2.3

Obige Betrachtungen zeigen, daß die Lochprojektionen keine Information über f innerhalb von $\text{co}(G)$ beinhalten.

Es ist lediglich möglich, die Berandung der konvexen Hülle von G zu bestimmen und f außerhalb von $\text{co}(G)$ zu berechnen.

§ 3 Ansätze zur Behandlung von Lochprojektionen

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Ansätze zur Behandlung von Lochprojektionen dargestellt und verglichen. Aus der Kritik dieser Verfahren wird ein Katalog wünschenswerter Eigenschaften hergeleitet, der wesentlichen Einfluß auf die Entwicklung des in dieser Arbeit beschriebenen Algorithmus hatte.

Man kann die veröffentlichten Verfahren in zwei Klassen einteilen. Zum einen jene, die aus einem unvollständigen Datensatz direkt das Bild berechnen, und zum anderen solche, die zunächst die großen und ungenauen Daten gegen fiktive Meßwerte austauschen und anschließend einen Standardrekonstruktionsalgorithmus auf den vervollständigten Datensatz anwenden.

Allen mir bekannten Veröffentlichungen ist gemeinsam, daß der Metallgegenstand als kreisförmig und zentral gelegen vorausgesetzt wird.

Zur ersten Klasse gehören die Verfahren von Perry [23] und Natterer [21].

Perry versuchte den bekannten Anteil von R_f nach orthogonalen Funktionen zu entwickeln und anschließend f aus den berechneten Koeffizienten mit einem dualen System von Ansatzfunktionen zu ermitteln. Dieses Vorgehen ist jedoch bereits bei vollständigen Daten sehr empfindlich gegenüber Meßungenauigkeiten und zeigt trotz beträchtlichen Rechenaufwands nur mäßige Bildgüte.

Natterers Verfahren scheint unter den hier verglichenen die beste Bildqualität zu liefern. Es ist jedoch sehr aufwendig bzgl. Rechenzeit und Speicherbedarf. Im Prinzip ließe es sich auch auf Lochprojektionen anwenden, die durch Objekte allgemeiner Form und Lage hervorgerufen werden. Der ohnehin große Rechenzeitaufwand würde durch die dann fehlende Symmetrie der zur Verfügung stehenden Meßdaten bei heutiger Meßgeometrie um einige Zehnerpotenzen vervielfacht. Ich sehe keine Möglichkeit der Modifikation dieses Algorithmus zur Anwendung auf heutigen Rechenautomaten.

Theoretisch wäre auch die direkte Bildrekonstruktion mit Hilfe der von Cormack [2, 3] angegebenen Formeln denkbar. Lewitt und Bates [12] haben jedoch gezeigt, daß dieses Vorgehen numerisch nicht stabil ist.

Zur zweiten Klasse gehören die lineare Interpolation und die konsistente Ergänzung nach Lewitt und Bates [14, 15]. Ist der Metallgegenstand relativ klein und seine Umgebung homogen, so führt sogar die Substitution der gestörten Daten durch lineare Interpolation zur Bildverbesserung. Die konsistente Ergänzung nach Lewitt und Bates erlaubt eine weitere Verringerung der Artefakte. Aus Gründen der Instabilität können bei diesem Verfahren die Ansatzräume nicht allzugroß gewählt werden. Eine Verallgemeinerung dieser Methode für Metallgegenstände, die nicht zentral liegen und kreisförmigen Querschnitt haben, ist möglich, aber vom Rechenzeit- und Speicheraufwand her praktisch nicht brauchbar.

Ein für die kommerzielle Anwendung geeignetes Verfahren sollte also folgende Eigenschaften haben:

1. geringer Rechenzeitaufwand,
2. geringer Speicherplatzbedarf,
3. weitgehend sequentieller Speicherzugriff,
4. Verwendbarkeit der in heutigen Computer - Tomographen vorhandenen speziellen Hardware und Software,
5. angemessene Bildqualität,
6. numerische Stabilität und
7. Brauchbarkeit des Algorithmus auch bei störenden Objekten beliebiger Lage und Form.

Hier wird eine Weiterentwicklung des in meiner mathematischen Diplomarbeit [1] beschriebenen Verfahrens angegeben. Grundidee ist auch hier die konsistente Ergänzung, jedoch werden im Vergleich zu Lewitt und Bates. [14, 15] die etwas modifizierten Konsistenzbedingungen wesentlich konsequenter genutzt. Anstelle einer Fourierentwicklung von R_f wird hier lediglich der fehlende Anteil der Radon-transformierten R_f nach geeigneten Ansatzfunktionen entwickelt.

Dadurch kann die polynomiale Ansatzraumdimension klein gehalten werden, der Rechenaufwand wird geringer, und die Probleme der numerischen Instabilität treten in weit geringerem Umfang auf.

Auch in meiner Diplomarbeit wurde vom klassischen Fall des im Querschnitt kreisförmigen und zentral gelegenen strahlungsundurchlässigen Teilgebietes ausgegangen.

Diese Einschränkung ist bei den hier beschriebenen Ansatzräumen nicht mehr nötig.

Die Verwendung von Jacobipolynomen zur Gewichtsfunktion $1 - x^2$ im Gegensatz zu den Legendrepolynomen erleichtert die numerische Durchführung und vermindert den Rechenaufwand.

Für diese allgemeinere Version wird in § 8 ein Algorithmus angegeben, der die Erkennung der konvexen Hülle des Querschnittes des Metallgegenstandes ermöglicht.

Kapitel II : Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Fundamente meines Ergänzungsverfahrens dargestellt. Besondere Beachtung finden dabei die Frage nach der Eindeutigkeit des Bildes, die Formulierung der für den Algorithmus grundlegenden Konsistenzbedingungen und die Beschreibung geeigneter Ansatzräume zur Erfüllung dieser Konsistenzbedingungen.

§ 4 Grundidee des Verfahrens

Zunächst stellt sich die Frage, ob die Rekonstruktion von Bildern aus Lochprojektionen überhaupt in eindeutiger Weise möglich ist.

Sei G ein konvexes Gebiet und $\hat{G}$ die Menge jener Parameter (s, φ) , für die $\{s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi) : t \in \mathbb{R}\} \cap G \neq \emptyset$ ist.

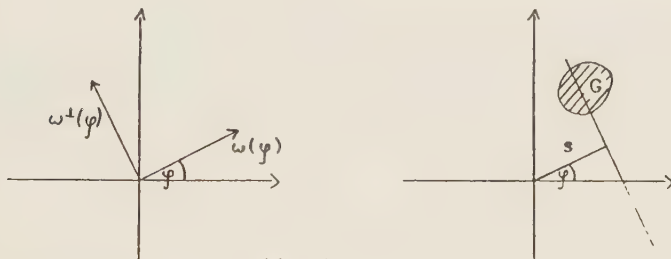


Abb. 4.1

Für kreisförmige Gebiete G zeigte Helgason ([7], Satz 2.6 in Kapitel I), daß eine stetige Funktion mit kompaktem Träger, deren Radontransformierte auf $\mathbb{R} \times [0, 2\pi] \setminus \hat{G}$ gleich 0 ist, selbst auf $\mathbb{R}^2 \setminus G$ identisch 0 ist. Also ist wegen der Linearität der Radontransformation eine stetige Funktion f durch die Werte $Rf(s, \varphi)$ für alle $(s, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \setminus \hat{G}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus G$ eindeutig bestimmt.

Daraus kann man sich die Eindeutigkeitsaussage für beliebige konvexe Gebiete G herleiten. Sind f_1 und f_2 stetige Funktionen mit kompaktem Träger, G ein konvexes Gebiet und gilt

$Rf_1(s, \varphi) = Rf_2(s, \varphi)$ für alle $(s, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \setminus \hat{G}$, so ist auch $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus G$.
Für jedes solche x_0 kann man nämlich ein kreisförmiges Gebiet K wählen mit den Eigenschaften $G \subset K$ und $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus K$.

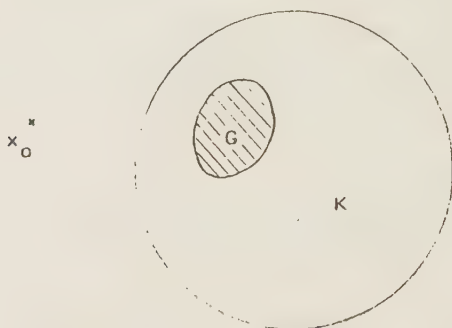


Abb. 4.2

Nun ist durch obigen Eindeutigkeitsatz für kreisförmige Gebiete $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ wegen $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ gesichert.
Durch Regularisierung kann man die Eindeutigkeitsaussage auf die schwächere Voraussetzung $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ausdehnen, freilich unter Beibehaltung der Forderung, daß f kompakten Träger besitzt.

Also ist es sinnvoll, sich mit der Rekonstruktion von Bildern aus Lochprojektionen zu beschäftigen.

Um die in kommerziellen Geräten vorhandene spezielle Hard- und Software verwenden zu können, ist es nötig, die fehlenden bzw. stark gestörten Daten geeignet zu ergänzen.

In § 5 werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß es zu einer Funktion g eine Funktion f mit kompaktem Träger und der Eigenschaft $Rf = g$ gibt. Diese Konsistenzbedingungen werden zur Ergänzung der Lochprojektionen genutzt. Anschließende Bildrekonstruktion mit einem Standardverfahren (z.B. Faltungsalgorithmus) und Einblenden des Metallgegenstandes liefert schließlich das gewünschte Schichtbild.

Freilich ist es nicht möglich, unendlich viele Werte von Rf zu messen oder g an unendlich vielen Stellen auszuwerten. Darüberhinaus sind Meßwerte mit Fehlern behaftet, und durch

den Ergänzungsalgorithmus können keineswegs alle Konsistenzbedingungen erfüllt werden.

Die Stetigkeit des Operators R^{-1} , d.h. des Inversen der Radontransformation R , garantiert für praktische Zwecke dennoch gute Resultate.

Die Konsistenzbedingungen gelten unter der Voraussetzung, daß f einen kompakten Träger hat. Sind sie verletzt, so entsteht bei der Anwendung von R^{-1} eine Funktion, deren Träger nicht mehr kompakt ist. Auch bezüglich solcher Inkonsistenzen verhält sich der Operator R^{-1} gutartig. Falls sie geringfügig sind, sind die im Bild auftretenden Artefakte zu vernachlässigen.

Ein vollständig befriedigender und mathematisch exakter Konvergenzbeweis mit Hilfe der Sobolewnormen soll hier nicht geführt werden. Er ergibt sich jedoch durch leichte Modifikation der Beweise zu den Sätzen 5.4.1, 5.4.3, 5.5.1 und 5.5.2 meiner Diplomarbeit [1].

Ziel dieser Arbeit ist vielmehr die Darstellung des aufgrund praktischer Erfordernisse recht komplizierten Ergänzungsverfahrens und der dazugehörigen theoretischen Grundlagen, sowie einiger für die Implementierung wichtiger Details.

§ 5 Konsistenzbedingungen

Bevor man ein Standardrekonstruktionsverfahren auf einen modifizierten Datensatz anwendet, sollte man zur Vermeidung von Artefakten sicherstellen, daß es trotz der Veränderungen ein Bild mit solchen Projektionsdaten gibt.

In diesem Paragraphen wird gezeigt, wie man dies mit Hilfe von Konsistenzbedingungen nachprüfen kann, die erstmals von Ludwig [19] angegeben wurden.

Für die folgenden Betrachtungen sei f eine quadratintegrierbare Funktion, die außerhalb des Einheitskreises identisch gleich null ist. Wie in § 1 sei $\omega(\varphi) := (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ und $\omega^\perp(\varphi) := (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$.

Dann gilt für die Radontransformierte g :

a)

$$\underline{\underline{g(s, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi)) \, dt = 0 \quad \text{für } |s| \geq 1,}}$$

$$\text{denn } \|s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi)\| = \sqrt{s^2 + t^2} \geq |s| \quad \text{und} \\ f(x) = 0 \quad \text{für } |x| \geq 1.$$

b)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{g(s, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}} f(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi)) \, dt}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(-s\omega(\varphi+\pi) + t\omega^\perp(\varphi+\pi)) \, dt \\ &= \underline{\underline{g(-s, \varphi+\pi)}}. \end{aligned}$$

c) Für jede ganze Zahl $m \geq 0$ gilt:

$$\underline{\underline{\int_{\mathbb{R}} s^m g(s, \varphi) \, ds = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} s^m f(s\omega + t\omega^\perp) \, dt \, ds =}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \langle x, \omega \rangle^m f(x) \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} (x_1 \cdot \cos(\varphi) + x_2 \cdot \sin(\varphi))^m f(x) \, dx,
 \end{aligned}$$

also ein trigonometrisches Polynom in φ
höchstens m - ten Grades.

In Smith, Solmon, Wagner [29], Satz 13.4 wird gezeigt, daß die obigen Bedingungen auch hinreichend sind, d.h. zu jeder Funktion g , die a) - c) erfüllt, existiert ein f mit kompaktem Träger und $g = Rf$.

Die Konsistenzbedingung a) spielt bei der Ergänzung von Lochprojektionen keine Rolle, da nur Werte $g(s, \varphi)$ mit $|s| < 1$ von einer Veränderung betroffen sind. Sie besagt lediglich, daß Strahlen, die das Meßobjekt nicht treffen, auch nicht abgeschwächt werden.

Gleichung b) bedeutet, daß man bei Vertauschung von Strahlenquelle und Detektor denselben Meßwert erhält.

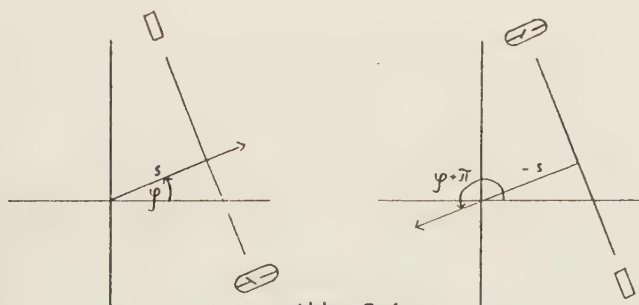


Abb. 5.1

Neben den recht unproblematischen Bedingungen a) und b) bildet c) den Kern des in dieser Arbeit dargestellten Verfahrens.

Für festes m ist $c)$ offenbar abhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Es stellt sich also die Frage, ob eine Koordinatentransformation, bei der etwa der Ursprung in den Schwerpunkt des Querschnittes des Metallgegenstandes verschoben wird, zu einer Verbesserung des Ergänzungsverfahrens führen kann.

Dies ist jedoch nicht der Fall, wie die folgende Rechnung zeigt.

$$\tilde{f}(x) := f(x + x_0) ,$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(s, \varphi) &:= R\tilde{f}(s, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s\omega + t\omega^\perp) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s\omega + t\omega^\perp + x_0) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f((s + \langle x_0, \omega \rangle)\omega + (t + \langle x_0, \omega^\perp \rangle)\omega^\perp) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f((s + \langle x_0, \omega \rangle)\omega + t\omega^\perp) dt \\ &= g(s + \langle x_0, \omega \rangle, \varphi) . \end{aligned}$$

g genüge für $m \leq M$ der Bedingung $c)$, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} s^m g(s, \varphi) ds \text{ ist ein trigonometrisches Polynom höchstens}$$

m -ten Grades; dann gilt für $\tilde{g}$:

$$\int_{\mathbb{R}} s^m \tilde{g}(s, \varphi) ds = \int_{\mathbb{R}} s^m g(s + \langle x_0, \omega \rangle, \varphi) ds =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}} (s - \langle x_0, \omega \rangle)^m g(s, \varphi) \, ds \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \langle x_0, \omega \rangle^{m-k} \int_{\mathbb{R}} s^k g(s, \varphi) \, ds .
 \end{aligned}$$

Der Grad des Produktes zweier trigonometrischer Polynome ist gleich der Summe der Grade dieser Polynome.

Also erfüllt auch $\tilde{g}$ das Kriterium c) für alle $m \leq M$.

Da der hier dargestellte Ergänzungsalgorithmus die Lochprojektionen so ergänzt, daß c) für $m \leq M$ gilt, kann die Wahl des Koordinatensystems willkürlich getroffen werden, ohne das Ergebnis zu verändern.

Für numerische Zwecke muß c) freilich umformuliert werden. Wegen der Orthogonalitätsbeziehungen zwischen den Funktionen $\sin(n\varphi)$ und $\cos(n\varphi)$ folgt aus c):

$$\begin{aligned}
 \text{d) } &\int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} s^m g(s, \varphi) \sin(n\varphi) \, ds \, d\varphi = 0 \quad \text{und} \\
 &\int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} s^m g(s, \varphi) \cos(n\varphi) \, ds \, d\varphi = 0 \quad \text{für alle } n > m \geq 0 .
 \end{aligned}$$

Da die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} , \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\varphi) , \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\varphi) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ein vollständiges Orthonormalsystem des $L^2(0, 2\pi)$ bilden, ist d) sogar äquivalent zu c).

Die Bedingungen a), b) und d) sind die Grundlage der in dieser Arbeit beschriebenen konsistenten Ergänzung von Lochprojektionen.

§ 6 Ein Ansatzraum zur konsistenten Ergänzung

Wie in den letzten beiden Abschnitten gezeigt wurde, genügt es, die Lochprojektionen konsistent zu ergänzen, also so, daß die Bedingungen a), b) und d) aus § 5 erfüllt sind. Dann liefert ein Standardrekonstruktionsverfahren ein Bild, dessen relevanter, d.h. außerhalb der konvexen Hülle des Querschnittes des Metallgegenstandes gelegene Teil mit dem des gesuchten übereinstimmt.

Wie diese Ergänzung theoretisch durchgeführt wird, ist Thema dieses Paragraphen.

Sei wie bisher f eine Dichtefunktion auf dem Einheitskreis und g ihre Radontransformierte. Mit $\tilde{g}$ seien die Meßwerte für g bezeichnet. Da man nur endlich viele Werte $\tilde{g}(s_1, \varphi_1)$ für $i = 1 \dots N$ messen kann, denke man sich $\tilde{g}$ dazwischen interpoliert.

Die Lochprojektionen seien durch stetige Funktionen $r_1(\varphi)$ und $r_2(\varphi)$ festgelegt, d.h. es gelte:

$\tilde{g}(s, \varphi)$ ist genau dann bekannt, wenn $s \leq r_1(\varphi)$ oder $s \geq r_2(\varphi)$.

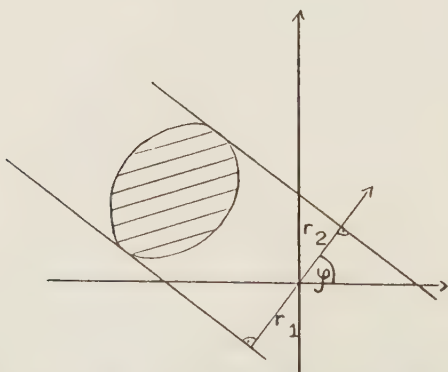


Abb. 6.1

Für solche (s, φ) ist $\tilde{g}(s, \varphi)$ eine gute Näherung für $g(s, \varphi)$. Sind zusätzlich die Meßwerte $\tilde{g}(s, \varphi)$ für $r_1(\varphi) < s < r_2(\varphi)$ bekannt und lediglich gering gestört, so kann man den kompletten Meßdatensatz als Startnäherung g_0 verwenden und die Inkonsistenzen durch Modifikation von g_0 an den Stellen (s, φ) mit $r_1(\varphi) < s < r_2(\varphi)$ reduzieren.

Ist dies nicht der Fall, so kann man sich eine Startnäherung g_0 z.B. durch lineare Interpolation zwischen den Randwerten beschaffen:

$$g_0(s, \varphi) := \tilde{g}(s, \varphi) \quad \text{falls } s \leq r_1(\varphi) \quad \text{oder } s \geq r_2(\varphi);$$

$$g_0(s, \varphi) := \tilde{g}(r_1(\varphi), \varphi) + (s - r_1(\varphi)) \frac{\tilde{g}(r_2(\varphi), \varphi) - \tilde{g}(r_1(\varphi), \varphi)}{r_2(\varphi) - r_1(\varphi)} \\ \text{falls } r_1(\varphi) < s < r_2(\varphi).$$

Dadurch sind auch die Stetigkeitsanforderungen von g_0 erfüllt, die für die Weiterverarbeitung aus numerischen Gründen unverzichtbar sind.

Unabhängig von der Art dieser stetigen Ergänzung durch Übernahme gestörter Meßdaten, lineare Interpolation oder ähnliches, deren Auswahl für die folgenden Überlegungen belanglos ist, wird nun die Funktion g_0 iterativ verändert. Dadurch entsteht eine Folge von Funktionen (g_k) , für die gilt:

$$a) \quad g_k(s, \varphi) = \tilde{g}(s, \varphi) \quad \text{falls } s \leq r_1(\varphi) \quad \text{oder } s \geq r_2(\varphi);$$

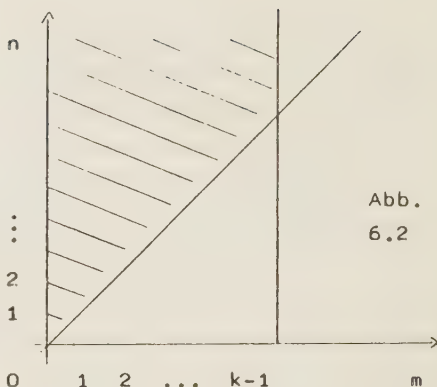
$$b) \quad g_k(s, \varphi) = g_k(-s, \varphi + \pi) \quad \text{für alle } (s, \varphi);$$

$$c) \quad \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 s^m \sin(n\varphi) g_k(s, \varphi) ds d\varphi = 0 \quad \text{und}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 s^m \cos(n\varphi) g_k(s, \varphi) ds d\varphi = 0 \quad \text{falls } m \neq k-1 \\ \text{und } n > m \geq 0.$$

Also stimmt $g_k(s, \varphi)$ mit $\tilde{g}(s, \varphi)$ überein, falls diese Werte bekannt und ungestört sind. Damit erfüllt g_k auch a) aus § 5. Bedingung b) entspricht b) in § 5 und c) bedeutet, daß d) aus § 5 teilweise erfüllt ist. Das Diagramm auf der nächsten Seite mag dies veranschaulichen.

In nebenstehender Zeichnung sind die Parameter m und n der unter c) angegebenen Integrale aufgetragen. Die Konsistenzbedingung d) aus § 5 besagt, daß für alle m und n mit $n > m$ diese Integrale gleich 0 sein sollten. Diese Paare (m,n) liegen oberhalb der Diagonale.



Tatsächlich wird die Bedingung durch g_k nur für $m \leq k-1$ und $n > m \geq 0$ erfüllt. Der schraffierte Bereich beschreibt ihre Lage.

Man beachte, daß die Konsistenzbedingungen theoretisch für unendlich viele Paare (m,n) erfüllt werden, da n nicht nach oben beschränkt ist. Dies begründet den Vorteil dieses Verfahrens gegenüber anderen Ergänzungsalgorithmen.

Die Konstruktion von Ansatzfunktionen, die eine derartige iterative Modifikation ermöglichen, gelingt unter Verwendung der Jacobipolynome zur Gewichtsfunktion $1 - x^2$. Das sind Polynome (P_k) , die folgende Bedingungen erfüllen:

$\text{grad}(P_k) = k$ für alle $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2) P_k(x) P_1(x) dx \begin{cases} \neq 0 & \text{für } k = 1 \\ = 0 & \text{für } k \neq 1 \end{cases}.$$

Fordert man schließlich noch

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2) P_k^2(x) dx = \frac{8(k+1)}{(2k+3)(k+2)}.$$

so sind die Polynome (P_k) eindeutig bestimmt. Diese letzte Gleichung mutet etwas willkürlich an. Durch diese Festlegung erreicht man, daß diese Polynome eine Reihe sehr hübscher Eigenschaften bekommen, von denen hier vor allem die folgende

Rekursionsformel Bedeutung hat. Der interessierte Leser sei auf das Buch von Polya und Szegö ([24], S. 91 ff, S. 287 ff) verwiesen.

Es gilt $P_0(x) = 1$,

$$P_1(x) = 2x$$

und für $k \geq 2$:

$$P_k(x) = \frac{(k+1)(2k+1)}{k(k+2)} x P_{k-1}(x) - \frac{k+1}{k+2} P_{k-2}(x).$$

Damit ist die Berechnung der Koeffizienten dieser Polynome leicht möglich.

Ist
$$P_k(x) = \sum_{l=0}^k a_{l,k} x^l, \text{ so folgt für alle } k \geq 2:$$

$$a_{0,k} = -\frac{k+1}{k+2} a_{0,k-2},$$

$$a_{1,k} = \frac{(k+1)(2k+1)}{k(k+2)} a_{1-1,k-1} - \frac{k+1}{k+2} a_{1,k-2} \quad \text{für } 1 \leq k-2 \text{ und}$$

$$a_{k,k} = \frac{(k+1)(2k+1)}{k(k+2)} a_{k-1,k-1}.$$

Im übrigen gilt $P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$, also $a_{1,k} = 0$ für $1 \neq k$ (2); daher ist auch $a_{k-1,k} = 0$.

Da die Polynome (P_k) eine Basis des Polynomraumes bilden, kann man jedes Monom als Linearkombination solcher Jacobipolynome darstellen, also

$$x^m = \sum_{l=0}^m b_{l,m} P_l(x),$$

und daher gilt für alle $m < k$:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2) P_k(x) x^m dx = \sum_{l=0}^m b_{l,m} \int_{-1}^1 (1-x^2) P_k(x) P_l(x) dx$$

$$= 0.$$

Für $m = k$ erhält man

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2) P_k(x) x^k dx &= \sum_{l=0}^k b_{l,k} \int_{-1}^1 (1-x^2) P_k(x) P_l(x) dx \\ &= b_{k,k} \int_{-1}^1 (1-x^2) P_k^2(x) dx \\ &= \frac{8(k+1)}{(2k+3)(k+2)} a_{k,k} \end{aligned}$$

denn offensichtlich ist $b_{k,k} = \frac{1}{a_{k,k}}$.

Nun kann man leicht Polynome (p_k) angeben mit den folgenden Eigenschaften :

$\text{grad}(p_k) = k+2$ und $p_k(-1) = p_k(1) = 0$, sowie

$$\int_{-1}^1 p_k(x) x^m dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m < k \\ 1 & \text{für } m = k \end{cases}$$

Nach den bisherigen Erkenntnissen genügt es nämlich,

$$p_k(x) = \frac{(2k+3)(k+2)}{8(k+1)} a_{k,k} (1-x^2) P_k(x) \quad \text{zu setzen.}$$

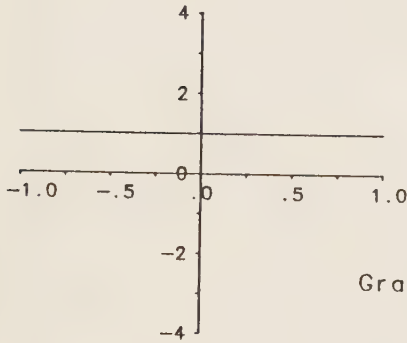
Zur Veranschaulichung sind auf den nächsten beiden Seiten die Graphen der Jacobipolynome P_k (links) ohne und p_k (rechts) mit Gewichtung für $k = 0, \dots, 5$ aufgetragen (Abb. 6.3 und 6.4). Um eine bessere Vergleichbarkeit zu gewährleisten, wurden die Längeneinheiten in den Zeichnungen soweit wie möglich identisch gewählt.

Die Maximalwerte der gewichteten Polynome p_k nehmen besonders rasch zu. Man beachte die Skalierungsunterschiede zwischen beiden Seiten !

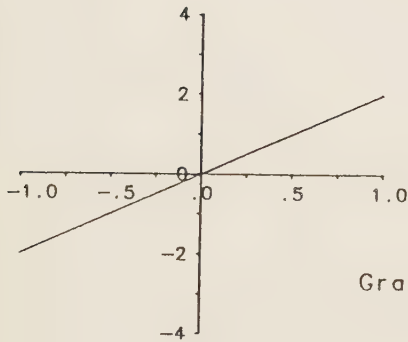
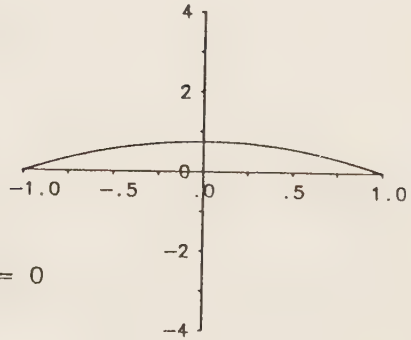
Die Zeichnungen wurden mit Hilfe des Graphiksystems des Leibniz-Rechenzentrums München (LRZ) auf dem Trommelplotter Calcomp 1051 erstellt.

Abb. 6.3

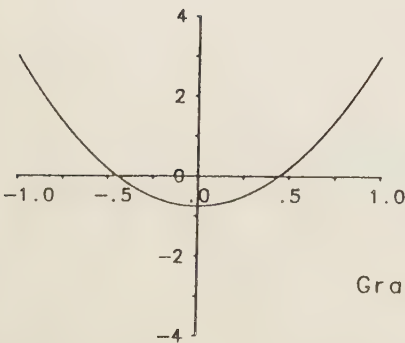
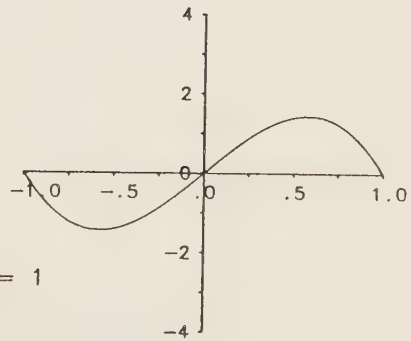
Jacobipolynome ohne und mit Gewichtung



Grad = 0



Grad = 1



Grad = 2

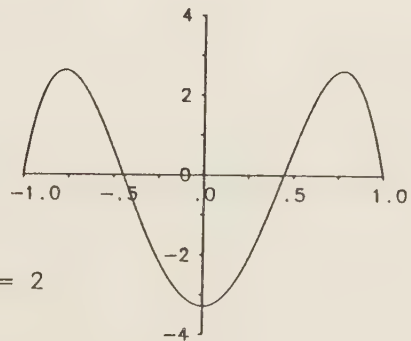
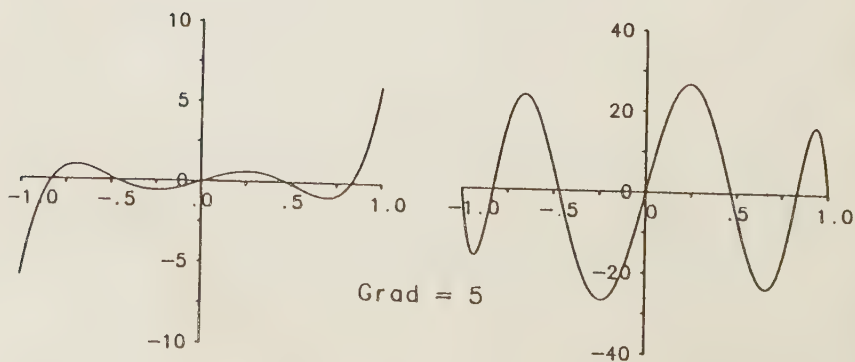
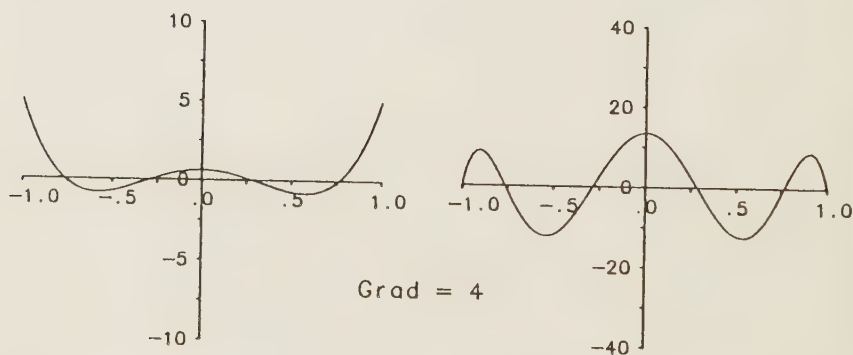
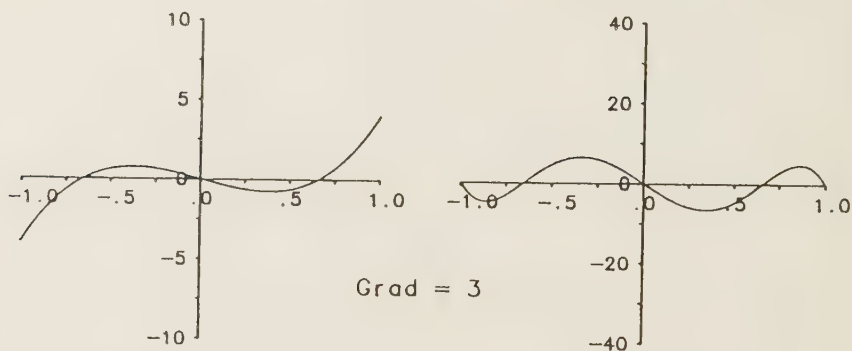


Abb. 6.4

Jacobipolynome ohne und mit Gewichtung



Unser Ziel ist die Konstruktion einer Folge (g_k) , die die Bedingungen a) - c) erfüllt, durch Modifikation der Funktion g_0 an den Stellen (s, φ) mit $r_1(\varphi) < s < r_2(\varphi)$.

Die Verwendung der Polynome (p_k) erfordert daher zunächst eine Variablentransformation für jedes φ :

$$x = \frac{2s - r_1(\varphi) - r_2(\varphi)}{r_2(\varphi) - r_1(\varphi)} \quad \text{bzw.}$$

$$s = \frac{r_1(\varphi) + r_2(\varphi)}{2} + \frac{r_2(\varphi) - r_1(\varphi)}{2} x.$$

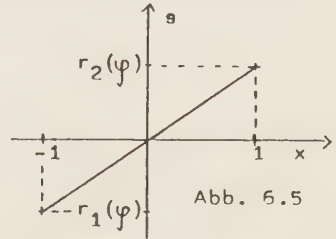


Abb. 6.5

Setzt man nun unter Beachtung dieser von φ abhängigen Transformation

$$p_k(s, \varphi) := \left(\frac{2}{r_2(\varphi) - r_1(\varphi)} \right)^{k+1} p_k(x) \quad \text{für } r_1(\varphi) < s < r_2(\varphi),$$

$$p_k(s, \varphi) := 0 \quad \text{für } s \leq r_1(\varphi) \text{ oder } s \geq r_2(\varphi),$$

so erhält man geeignete Ansatzfunktionen;

denn es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} s^m p_k(s, \varphi) ds &= \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} s^m p_k(s, \varphi) ds = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{r_1(\varphi) + r_2(\varphi)}{2} + \frac{r_2(\varphi) - r_1(\varphi)}{2} x \right)^m \cdot \left(\frac{2}{r_2(\varphi) - r_1(\varphi)} \right)^{k+1} \\ &\quad \cdot p_k(x) \cdot \frac{r_2(\varphi) - r_1(\varphi)}{2} dx = \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{r_1(\varphi) + r_2(\varphi)}{2} + \frac{r_2(\varphi) - r_1(\varphi)}{2} x \right)^m \left(\frac{2}{r_2(\varphi) - r_1(\varphi)} \right)^k p_k(x) dx =$$

$$\sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \left(\frac{r_2(\varphi) - r_1(\varphi)}{2} \right)^{l-k} \left(\frac{r_1(\varphi) + r_2(\varphi)}{2} \right)^{m-l} \int_{-1}^1 x^l p_k(x) dx =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{für } m < k \\ 1 & \text{für } m = k \end{cases}.$$

Darüberhinaus ist $p_k(s, \varphi)$ in s stetig, da

$$p_k(r_1(\varphi), \varphi) = p_k(-1) = p_k(1) = p_k(r_2(\varphi), \varphi) = 0,$$

und $p_k(x)$ stetig ist.

Der rekursive Ansatz für g_k lautet nun

$$g_k(s, \varphi) = g_{k-1}(s, \varphi) - c_k(\varphi) p_{k-1}(s, \varphi),$$

wobei die Koeffizienten c_k nur von φ und nicht von s abhängen.

Wählt man für eine Indexmenge $I_k \subset \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} c_k(\varphi) := & \frac{1}{\pi} \sum_{l \in I_k} \sin(l\varphi) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 s^{k-1} g_{k-1}(s, \psi) \sin(l\psi) ds d\psi \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{l \in I_k} \cos(l\varphi) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 s^{k-1} g_{k-1}(s, \psi) \cos(l\psi) ds d\psi, \end{aligned}$$

so erreicht man für alle $l \in I_k$:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 s^{k-1} g_k(s, \varphi) \sin(l\varphi) ds d\varphi = 0 \quad \text{und}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 s^{k-1} g_k(s, \varphi) \cos(l\varphi) ds d\varphi = 0.$$

Es gilt nämlich für alle $l \in I_k$:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 s^{k-1} c_k(\varphi) p_{k-1}(s, \varphi) \sin(l\varphi) ds d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} c_k(\varphi) \sin(l\varphi) d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \sin^2(l\varphi) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 s^{k-1} g_{k-1}(s, \varphi) \sin(l\varphi) ds d\varphi d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 s^{k-1} g_{k-1}(s, \varphi) \sin(l\varphi) ds d\varphi$$

und analog

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 s^{k-1} c_k(\varphi) p_{k-1}(s, \varphi) \cos(l\varphi) ds d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 s^{k-1} g_{k-1}(s, \varphi) \cos(l\varphi) ds d\varphi .$$

Betrachtet man c), so liegt die Wahl $I_k := \{k, k+1, k+2, \dots\}$ auf der Hand.

Denn so werden die gewünschten Konsistenzbedingungen erfüllt, während überflüssige Korrekturen (wie etwa im Falle $I_k = \mathbb{N}$ für große k), die zu numerischen Instabilitäten führen, unterbleiben. An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die in § 5 angegebenen Konsistenzbedingungen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind.

Die bereits erreichte Konsistenz wird beim Übergang von g_{k-1} zu g_k nicht beeinträchtigt, da

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 s^m c_k(\varphi) p_{k-1}(s, \varphi) \sin(n\varphi) ds d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} c_k(\varphi) \sin(n\varphi) \int_{-1}^1 s^m p_{k-1}(s, \varphi) ds d\varphi = 0 \quad \text{und analog}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 s^m c_k(\varphi) p_{k-1}(s, \varphi) \cos(n\varphi) ds d\varphi = 0$$

für $m \leq k-2$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Nun muß noch nachgewiesen werden, daß g_k die Bedingungen

a) - c) erfüllt. Dies geschieht durch vollständige Induktion.

g_0 hat diese Eigenschaften trivialerweise, falls nur die erste stetige Ergänzung symmetrisch war (d.h. $g_0(s, \varphi) = g_0(-s, \varphi + \pi)$).

Unter der Annahme, daß g_{k-1} a) - c) genügt, wird nun gezeigt, daß a) - c) auch für g_k gilt.

a) ist offensichtlich, da $g_{k-1}(s, \varphi)$ nur für $r_1(\varphi) < s < r_2(\varphi)$ verändert wird; c) folgt aus obigen Rechnungen.

Für b) genügt es,

$$c_k(\varphi) p_{k-1}(s, \varphi) = c_k(\varphi + \pi) p_{k-1}(-s, \varphi + \pi)$$

für $r_1(\varphi) < s < r_2(\varphi)$ nachzurechnen.

Aus der Definition von r_1 und r_2 ergibt sich (vgl. die dortige Skizze) mit obigen Bezeichnungen:

$$r_1(\varphi) = -r_2(\varphi + \pi),$$

$$r_2(\varphi) = -r_1(\varphi + \pi)$$

und damit

$$\begin{aligned}
 x(s, \varphi) &= \frac{2s - r_1(\varphi) - r_2(\varphi)}{r_2(\varphi) - r_1(\varphi)} = \frac{2s + r_2(\varphi + \pi) + r_1(\varphi + \pi)}{-r_1(\varphi + \pi) + r_2(\varphi + \pi)} \\
 &= - \frac{2(-s) - r_1(\varphi + \pi) - r_2(\varphi + \pi)}{r_2(\varphi + \pi) - r_1(\varphi + \pi)} \\
 &= -x(-s, \varphi + \pi) \quad .
 \end{aligned}$$

also für alle s mit $r_1(\varphi) < s < r_2(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
 p_{k-1}(s, \varphi) &= \left(\frac{2}{r_2(\varphi) - r_1(\varphi)} \right)^k p_{k-1}(x(s, \varphi)) \\
 &= \left(\frac{2}{-r_1(\varphi + \pi) + r_2(\varphi + \pi)} \right)^k p_{k-1}(-x(-s, \varphi + \pi)) \\
 &= \left(\frac{2}{r_2(\varphi + \pi) - r_1(\varphi + \pi)} \right)^k (-1)^{k-1} p_{k-1}(x(-s, \varphi + \pi)) \\
 &= (-1)^{k-1} p_{k-1}(-s, \varphi + \pi) \quad .
 \end{aligned}$$

Die in der Berechnung von c_k auftretenden Koeffizienten

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 s^{k-1} g_{k-1}(s, \psi) \sin(l\psi) \, ds \, d\psi \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 s^{k-1} g_{k-1}(s, \psi) \cos(l\psi) \, ds \, d\psi$$

können nur dann von 0 verschieden sein, wenn $k-1=1$ (2) gilt, denn

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 s^{k-1} g_{k-1}(s, \varphi) ds &= (-1)^{k-1} \int_{-1}^1 s^{k-1} g_{k-1}(-s, \varphi) ds \\ &= (-1)^{k-1} \int_{-1}^1 s^{k-1} g_{k-1}(s, \varphi + \pi) ds \end{aligned}$$

nach Induktionsvoraussetzung.

Also hat c_k nur $\sin(l\varphi)$ - und $\cos(l\varphi)$ -Anteile mit $k-1=1$ (2).
Da für solche l

$$\begin{aligned} \sin(l\varphi) &= (-1)^l \sin(l(\varphi + \pi)) = (-1)^{k-1} \sin(l(\varphi + \pi)) \text{ und} \\ \cos(l\varphi) &= (-1)^l \cos(l(\varphi + \pi)) = (-1)^{k-1} \cos(l(\varphi + \pi)) \end{aligned}$$

gilt, erhält man

$$c_k(\varphi) = (-1)^{k-1} c_k(\varphi + \pi)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} c_k(\varphi) p_{k-1}(s, \varphi) &= (-1)^{k-1} c_k(\varphi + \pi) (-1)^{k-1} p_{k-1}(-s, \varphi + \pi) \\ &= c_k(\varphi + \pi) p_{k-1}(-s, \varphi + \pi) . \end{aligned}$$

Es ist also gelungen, Funktionen g_k zu konstruieren, die a) - c) und damit einen großen Teil der in § 5 angegebenen Konsistenzbedingungen erfüllen.

Die Anwendung eines Standardrekonstruktionsverfahrens auf g_k wird nun ein Bild liefern, das das gesuchte im relevanten Teil besser approximiert als jenes, das sich durch direkte Verwendung von g_0 ergibt.

Die numerische Auswertung obiger Formeln ist mit relativ geringem Aufwand verbunden. Lediglich die unendliche Fourierreihe für c_k bedarf einer Vereinfachung.

Für die Umformungen wird folgende Abkürzung verwendet :

$$q_k(\varphi) := \int_{-1}^1 s^{k-1} g_{k-1}(s, \varphi) ds .$$

Nun gilt :

$$\begin{aligned}
 c_k(\varphi) &= \frac{1}{\pi} \sum_{l=k}^{\infty} \sin(l\varphi) \int_0^{2\pi} q_k(\psi) \sin(l\psi) d\psi \\
 &+ \frac{1}{\pi} \sum_{l=k}^{\infty} \cos(l\varphi) \int_0^{2\pi} q_k(\psi) \cos(l\psi) d\psi \\
 &= q_k(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_k(\psi) d\psi \\
 &- \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{k-1} \sin(l\varphi) \int_0^{2\pi} q_k(\psi) \sin(l\psi) d\psi \\
 &- \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{k-1} \cos(l\varphi) \int_0^{2\pi} q_k(\psi) \cos(l\psi) d\psi .
 \end{aligned}$$

Nun kann man $q_k(\varphi)$ für jedes φ auswerten und erhält daraus $c_k(\varphi)$ durch Subtraktion des oben angegebenen endlichen Anfangsabschnittes der Fourierreihe von q_k .

Der wesentliche Teil der Rechenzeit zur Berechnung von c_k wird bei der Auswertung der Integrale

$$\int_{-1}^1 s^{k-1} g_{k-1}(s, \varphi) ds$$

verbraucht, da der hier benötigte Datensatz sowohl von s als auch von φ abhängt. Eine deutliche Beschleunigung durch weiteres Umformen obiger Formeln ist also nicht möglich.

Man beachte jedoch, daß wegen b) im endlichen Anfangsabschnitt der Fourierreihe von q_k jeder zweite Term gleich 0 ist.

Der Ansatz mit Jacobipolynomen ist also ein effizientes Verfahren zur konsistenten Ergänzung von Lochprojektionen.

Kapitel III : Praktische Realisierung

In Kapitel II wurde ein Verfahren zur konsistenten Ergänzung von Lochprojektionen unter mathematisch idealen Voraussetzungen beschrieben.

Bei der Implementierung auf einem kommerziellen Computertomographen sieht man sich jedoch vor eine Vielzahl neu hinzutretender Probleme gestellt, von denen die wichtigsten in diesem Kapitel untersucht werden. Insbesondere wird auf die Objekterkennung und die numerische Berechnung der Koeffizienten c_k aus § 6 eingegangen.

§ 7 Überblick

In diesem Paragraphen wird der Ablauf der auf dem Computertomographen Somatom DR 3 der Firma Siemens entwickelten Programme skizziert. Dabei wird auch auf die Funktionsweise und die Strahlengeometrie dieses Gerätes eingegangen.

Der schematische Aufbau heutiger Computertomographen ist weitgehend identisch.

Eine Röntgenröhre ist über ein Gestell fest mit einem Detektorkranz verbunden und um ein gemeinsames Zentrum drehbar gelagert.

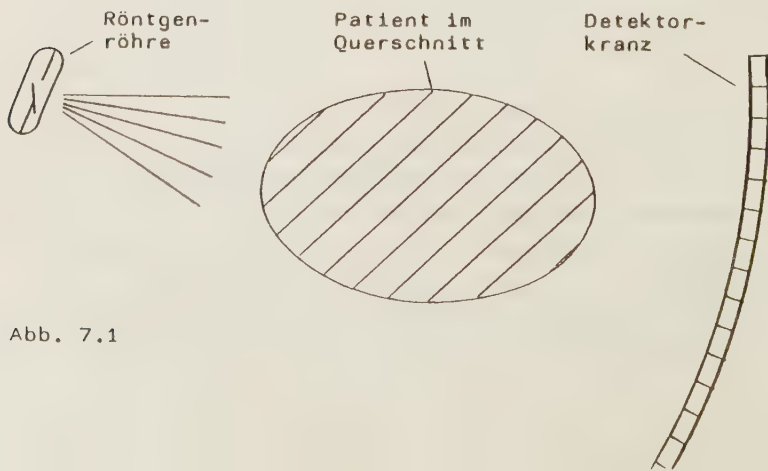


Abb. 7.1

Der Patient befindet sich auf einer Liege, um die die Meßelemente kreisen. Während der Drehbewegung wird in regelmäßigen Abständen an den einzelnen Detektoren die nicht absorbierte Strahlung (I) gemessen und mit jenem Intensitätswert (I_0) ins Verhältnis gesetzt, den man bei ausschließlichem Luftdurchgang erhält.

Wie in § 1 bereits erwähnt, entspricht $\ln(I_0/I)$ dem Wert der Radontransformierten im mathematischen Modell.

Diese Meßanordnung bezeichnet man als Fächerstrahlgeometrie. Bei Parallelstrahlgeometrie werden bei jeweils fester Durchstrahlungsrichtung die Messungen für alle unterschiedlichen Abstände des Strahles vom Zentrum durchgeführt. Dies vereinfacht die Rechnung, erfordert aber, daß die Röntgenröhre nicht nur gedreht, sondern auch während einer Projektion senkrecht zum Strahlengang bewegt wird.

Fächerstrahlprojektion

Parallelstrahlprojektion

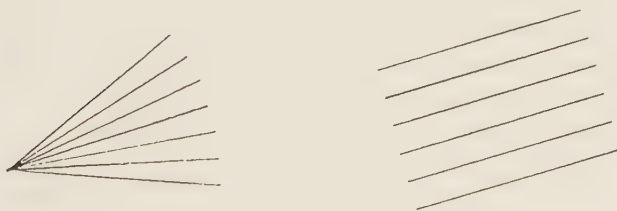


Abb. 7.2

Da dadurch die Aufnahmezeiten erheblich vergrößert werden, ist heute in kommerziellen Computertomographen nur noch die Fächerstrahlgeometrie zu finden.

Ist N die Anzahl der Projektionen, so wird bei dem verwendeten Tomographen jeweils nach Drehung um $\delta = 360^\circ/N$ eine Messung vorgenommen. Die M Detektoren sind kreisbogenförmig um die Röntgenröhre angeordnet und haben gleichen Winkelabstand ϵ (siehe Abb. 7.3).

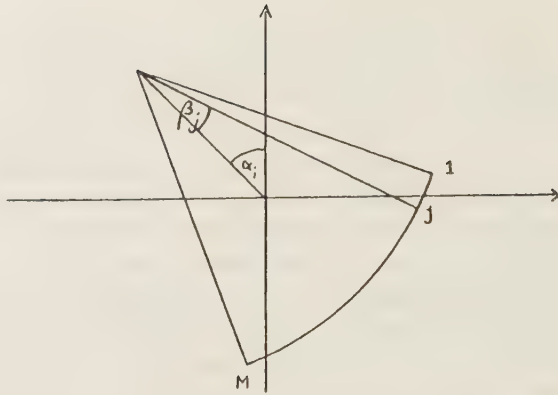


Abb. 7.3

Man erhält also Näherungen $p_{i,j}$ für die exakten Werte $g(R \cdot \sin(\beta_j), \alpha_1 + \beta_j)$, wobei R der Radius des vom Fokus durchlaufenen Kreises ist. Die Werte $p_{i,j}$ werden in der Reihenfolge der Messung auf einer Magnetplatte gespeichert. Die eben durchgeführte Umrechnung vom (α, β) -Koordinatensystem der Fächerstrahlgeometrie in das im theoretischen Teil verwendete (s, φ) -Koordinatensystem der Parallelstrahlgeometrie wird durch die folgenden Zeichnungen erläutert.

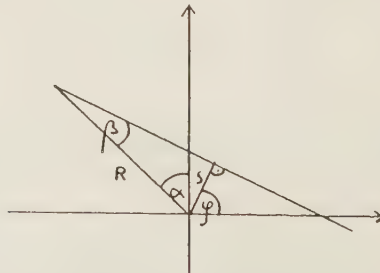


Abb. 7.4

Die Beziehung $s = R \cdot \sin(\beta)$ ist sofort aus der Definition des Sinus ersichtlich, da s die Gegenkathete zum Winkel β in einem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse R ist. Dreht man das Koordinatensystem um den Winkel α , so erhält man folgende Situation (Abb. 7.5).

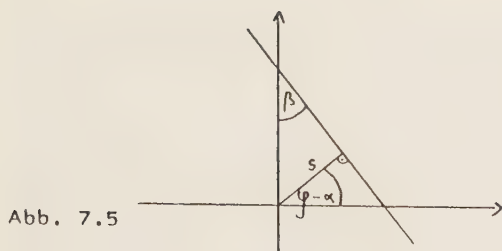


Abb. 7.5

Es ergibt sich $90^\circ - \beta = 90^\circ - (\varphi - \alpha)$ und damit $\varphi = \alpha + \beta$. Wegen der großen Zahl von Meßwerten ist eine Umsortierung aus Rechenzeitgründen nicht möglich. Da also die Daten sequentiell, d.h. in der Reihenfolge der Messungen, bearbeitet werden müssen, muß man sich eine klare Vorstellung von der Lage der Meßwerte einer Fächerstrahlprojektion in einem (s, φ) -Koordinatensystem verschaffen. Dies geschieht hier mit einer geschickt skalierten Zeichnung.

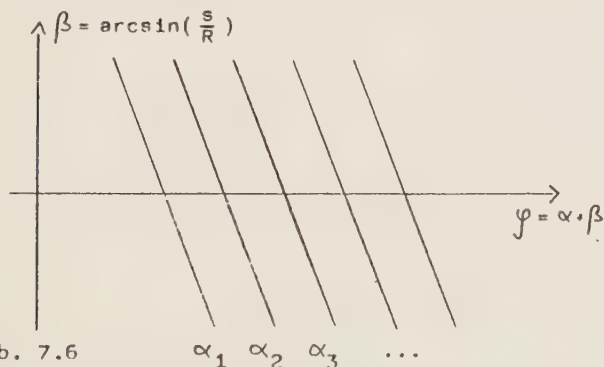


Abb. 7.6

Die einzelnen Fächerstrahlprojektionen werden durch parallele Strecken im $(\arcsin(\frac{s}{R}), \varphi)$ -Koordinatensystem repräsentiert.

Da die Drehrichtung nach jeder Aufnahme wechselt und der Startwinkel α_1 unterschiedlich ist, treten bei der Zuordnung zum Koordinatensystem der Bildebene erhebliche technische Schwierigkeiten auf, die Fallunterscheidungen erforderlich machen und die Gefahr von Programmierfehlern erhöhen.

Nach diesen einführenden Erläuterungen zur Fächerstrahlgeometrie kann nun der prinzipielle Ablauf der Rechnungen beschrieben werden.

Unmittelbar im Anschluß an die Messung erzeugt der Tomograph ein Bild, das durch den Metallgegenstand gestört ist.

Aufgrund des großen Dichteunterschiedes ist der Gegenstand dennoch gut zu lokalisieren und zu umgrenzen. Ist dies gelungen, so interessiert man sich für die Lage der gestörten Daten innerhalb jeder einzelnen Projektion.

Unter dem Oberbegriff Objekterkennung werden diese beiden Probleme in § 8 genauer dargestellt.

Als nächstes muß die Entscheidung getroffen werden, ob die gestörten Daten für die weitere Rechnung mitverwendet oder durch ein Interpolationsverfahren ausgetauscht werden sollen. Meiner Erfahrung nach sollte man nur dann auf die Meßdaten verzichten, wenn sie am Maximalwert angestoßen und damit völlig unbrauchbar sind.

Nun beginnt die eigentliche konsistente Ergänzung. Man berechnet die Koeffizienten $c_k(\varphi)$ für eine große Zahl von Werten φ durch numerische Integration. Läßt man hierbei nicht allergrößte Sorgfalt walten, so schlägt sich dies in über- raschend eklatanter Form im Ergebnis nieder.

Daher ist diesem Problem ein eigener Abschnitt (§ 9) gewidmet.

Die Auswertung der in § 6 angegebenen Formel

$$g_k(s, \varphi) = g_{k-1}(s, \varphi) - c_k(\varphi) p_{k-1}(s, \varphi)$$

erfolgt kanonisch unter Berücksichtigung der Strahlengeometrie.

Aus den so korrigierten Daten kann nun erneut ein Bild mit dem Standardrekonstruktionsalgorithmus erzeugt werden.

§ 8 Objekterkennung

In § 6 wurde davon ausgegangen, daß Funktionen $r_1(\varphi)$ und $r_2(\varphi)$ gegeben sind, die die Lage der fehlenden bzw. gestörten Meßwerte charakterisieren, nämlich

$g(s, \varphi)$ bekannt $\Leftrightarrow s \leq r_1(\varphi) \text{ oder } s \geq r_2(\varphi)$.

Zur Bestimmung dieser Funktionen wird zunächst ein Bild aus dem unveränderten Datensatz mit einem Standardverfahren berechnet. Dieses Bild erlaubt zumindest eine grobe Lage- und Umrißerkennung des störenden Objektes, das nun mit einem konvexen Polygon umbeschrieben wird. Damit ist die Bestimmung von $r_1(\varphi)$ und $r_2(\varphi)$ möglich.

Da durch die konsistente Ergänzung das Bild innerhalb des Polygons völlig verfälscht wird, dient dieses Polygon anschließend als Fenster für die Einblendung des rechnerisch eliminierten Störobjektes.

Zunächst liegt jedoch ein Bild in Form einer $N \times N$ - Matrix (beim verwendeten Tomographen 512×512) von Grauwerten vor. Es wurde ein Programm entwickelt, das eine Objekterkennung innerhalb dieser Matrix in mannigfacher Weise ermöglicht. Mit dem vorhandenen Meß- und Auswertesystem kann man mit Hilfe einer Widerstandsmatrix Umrisse auf dem Bildschirm einzeichnen und speichern. Diese Linien können erkannt und zur Objektbestimmung herangezogen werden.

Es ist jedoch auch eine automatische Objekterkennung durch Suche nach Grauwerten innerhalb eines frei wählbaren Intervalles möglich. Diese Suche kann auf einen rechteckigen Bildausschnitt beschränkt werden.

Dabei werden zunächst die am weitesten links bzw. rechts liegenden Punkte des Objektes in jeder Zeile in einem Array ganzer Zahlen als Werte von 1 bis N markiert.

Durch Auswahl extremal liegender Punkte erhält man die Ecken des kleinsten umbeschreibenden konvexen Polygons. Dies veranschaulicht die folgende Zeichnung.

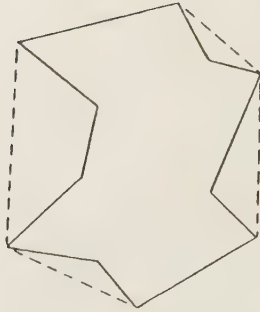


Abb. 8.1

Bei der Bildrekonstruktion ist es durch Parameterwahl möglich, auf der $N \times N$ - Matrix einen beliebigen Bildausschnitt mit und ohne Vergrößerung darzustellen. Um lästige Fallunterscheidungen zu vermeiden, ist es daher sinnvoll, die gefundenen Eckpunkte des Polygons in ein einheitliches Koordinatensystem umzurechnen. Es erwies sich als zweckmäßig, den Ursprung in den Drehpunkt der Meßapparatur zu legen und den Abstand Drehpunkt - Fokus auf 1 zu normieren. Als nächstes sind für jede Position der Röntgenröhre, in der eine Messung vorgenommen wurde, diejenigen Detektoren zu bestimmen, die gestörte Information erhalten haben. Dazu muß man zuerst feststellen, in welchen Eckpunkten die Tangenten vom Fokus aus das Polygon schneiden.

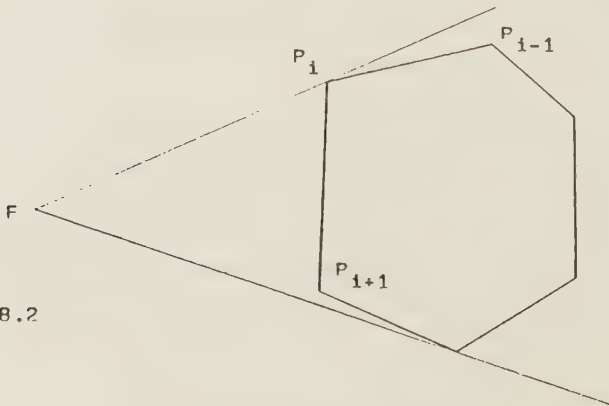


Abb. 8.2

Ein geeignetes Kriterium zum Auffinden dieser Tangentialpunkte erhält man durch Betrachtung der Orientierung der Dreiecke FP_1P_{1+1} . Genau an den Tangentialpunkten P_1 ist die Orientierung der Dreiecke $FP_{1-1}P_1$ und FP_1P_{1+1} verschieden.

Die Orientierung eines Dreiecks, dessen Ecken die kartesischen Koordinaten (x_1, y_1) , (x_2, y_2) und (x_3, y_3) haben, wird durch das Vorzeichen von

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

angegeben. Diese Determinante ist übrigens gerade die doppelte orientierte Fläche des angegebenen Dreiecks.

Durch Suche nach Vorzeichenwechseln findet man also die Tangentialpunkte. Dabei ist es freilich nicht nötig, für jede Fokusposition sämtliche Dreiecke FP_1P_{1+1} auf Orientierung zu untersuchen. Da sich der Fokus von Projektion zu Projektion jeweils nur um einen kleinen Winkel δ dreht, liegen die Tangentialpunkte in der Nähe der Tangentialpunkte bei der vorangegangenen Fokusposition.

Nun bleibt noch die Berechnung des Winkels $\beta = \angle OFP_1$.

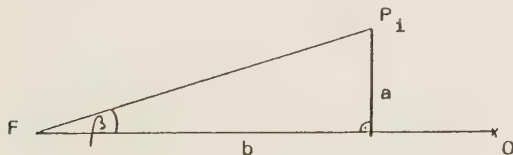


Abb. 8.3

Die kartesische Darstellung der Punkte F und P_1 laute

$F = (x_0, y_0)$ und $P_1 = (x_1, y_1)$.

Nun gilt: $\overline{OF} = 1$ nach Vereinbarung (s.o.),

$$1 - b = \langle (x_0, y_0), (x_1, y_1) \rangle = x_0 x_1 + y_0 y_1,$$

$$a = \langle (x_0, y_0)^\perp, (x_1, y_1) \rangle = -y_0 x_1 + x_0 y_1.$$

Damit erhält man

$$\beta = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) = \arctan\left(\frac{x_0 y_1 - y_0 x_1}{1 - x_0 x_1 - y_0 y_1}\right).$$

Es ist also gelungen, den Winkelbereich der betroffenen Detektoren zu bestimmen. Für die weitere Rechnung werden nun noch die minimale und die maximale Detektornummer in diesem Bereich bestimmt und auf der Magnetplatte als Zwischenergebnis abgespeichert.

Das auf einer PDP-11/44 in Fortran geschriebene Programm konnte soweit optimiert werden, daß für die Objekterkennung kaum mehr als eine Sekunde benötigt wird.

Dazu trug besonders die Verwendung von Halbierungsverfahren bei.

Zum Auffinden des Metallgegenstandes wurden die Zeilen nicht sequentiell von oben nach unten durchsucht, sondern mit einem immer feiner werdenden Gitter. Bei 512 Bildzeilen etwa wurden die Zeilen in der Reihenfolge

$2^7, 2^{6+k \cdot 2^7} (k=0,1), 2^{5+k \cdot 2^6} (k=0,\dots,3), 2^{4+k \cdot 2^5} (k=0,\dots,7), \dots$ betrachtet.

Anschließend erhält man durch fortgesetzte Intervallhalbierung die oberste Zeile, in die das gesuchte Objekt hineinragt.

Ebenfalls mit einem Halbierungsverfahren wurden die Tangentialpunkte für die erste Fokusposition ermittelt.

Dieser Halbierungstechnik und der oben hergeleiteten Vorzeichenregel ist es zu verdanken, daß die Objekterkennung in äußerst geringer Rechenzeit durchgeführt werden kann.

§ 9 Berechnung der Koeffizienten für die konsistente Ergänzung

In § 6 wurden Formeln für die Koeffizienten $c_k(\varphi)$ angegeben. Da die dabei auftretenden Integrationen sich über den gesamten Definitionsbereich der Funktion g_{k-1} erstrecken, während für die Korrektur von Inkonsistenzen g_{k-1} nur in einem kleinen Teil desselben verändert wird, führen bereits geringe Quadraturfehler zu einer wesentlichen Verschlechterung des Verfahrens. Daher muß die numerische Integration äußerst sorgfältig durchgeführt werden.

Der erste Schritt in der Berechnung von c_k ist die Auswertung der in § 6 angegebenen Funktion $q_k(\varphi)$ für einzelne Werte von φ :

$$q_k(\varphi) = \int_{-1}^1 s^{k-1} g_{k-1}(s, \varphi) ds .$$

Sind für festes φ_0 die Werte $g_{k-1}(s_i, \varphi_0)$, $i=1, \dots, N$ bekannt, so kann man obiges Integral durch eine gewichtete Summe dieser Funktionswerte approximieren. Eine solche Quadraturformel erhält man, indem man die zu integrierende Funktion zwischen den Stützstellen interpoliert und anschließend exakt integriert. Wenn man hierbei von $s^{k-1} \cdot g_{k-1}(s, \varphi_0)$ ausgeht, verschenkt man die Information über den Verlauf der Funktion s^{k-1} zwischen den Stützstellen s_i .

Daher ist es besser, die Gewichtsfunktion s^{k-1} in die Koeffizienten der Quadraturformel einzuarbeiten.

So ergibt sich ein Ansatz der Form

$$\int_{-1}^1 s^{k-1} \tilde{g}_{k-1}(s, \varphi_0) ds = \sum_{i=1}^N a_{i,k-1} g_{k-1}(s_i, \varphi_0) ,$$

wobei $\tilde{g}_{k-1}(s, \varphi_0)$ durch lineare Interpolation aus $g_{k-1}(s_i, \varphi_0)$ mit $i=1, \dots, N$ entsteht.

Interpolation höherer Ordnung ist nicht sinnvoll, da $g_{k-1}(s, \varphi_0)$ in der Regel nicht nach s differenzierbar ist.

Nun sei $s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_N$ vorausgesetzt.

In meiner Diplomarbeit ([1], S. 107) habe ich

$$a_{i,k-1} = \frac{1}{k(k+1)} \left(\frac{s_{i+1}^{k+1} - s_i^{k+1}}{s_{i+1} - s_i} - \frac{s_i^{k+1} - s_{i-1}^{k+1}}{s_i - s_{i-1}} \right)$$

für $i = 2, \dots, N-1$ nachgerechnet. Die speziellen Werte $a_{1,k-1}$ und $a_{N,k-1}$ werden nicht benötigt, da aufgrund der Meßgeometrie davon ausgegangen werden kann, daß $g_{k-1}(s_1, \varphi_0) = g_{k-1}(s_N, \varphi_0) = 0$ gilt.

Die obigen Formeln für $a_{i,k-1}$ sind jedoch numerisch nicht stabil, da mehrfach nahezu gleich große Zahlen voneinander abgezogen werden. Dies führt bei endlicher Rechengenauigkeit zu großen relativen Fehlern.

Ein einfaches Beispiel mag dies veranschaulichen :

$$\begin{aligned} s_{i-1} &:= 0.999 & , & & s_{i-1}^4 &= 0.9960059\dots & , \\ s_i &:= 1.000 & , & & s_i^4 &= 1.0000000\dots & , \\ s_{i+1} &:= 1.001 & , & & s_{i+1}^4 &= 1.0040060\dots & . \end{aligned}$$

Fünfstellige Gleitpunktrechnung liefert

$$\begin{aligned} s_{i+1}^4 - s_i^4 &\doteq 0.004 & , \\ s_i^4 - s_{i-1}^4 &\doteq 0.004 & , \end{aligned}$$

also

$$a_{1,2} \doteq 0.000 & ,$$

während man bei exakter Rechnung

$$a_{1,2} = 0.012\dots : 12 = 0.0010000001\bar{6}$$

erhält.

Schließlich ist das häufige Auswerten hoher Potenzen von s_i unbequem. Daher werden nun stabile Rekursionsformeln für die Koeffizienten $a_{i,k-1}$ hergeleitet, in denen keine Potenzen von s_i mehr auftreten.

Für $k \geq 1$ gilt:

$$\frac{s_{i+1}^{k+1} - s_i^{k+1}}{s_{i+1} - s_i} = \frac{s_{i+1}^k - s_i^k}{s_{i+1} - s_i} \cdot s_i + s_{i+1}^k,$$

$$\frac{s_i^{k+1} - s_{i-1}^{k+1}}{s_i - s_{i-1}} = \frac{s_i^k - s_{i-1}^k}{s_i - s_{i-1}} \cdot s_i + s_{i-1}^k$$

und damit

$$\frac{s_{i+1}^{k+1} - s_i^{k+1}}{s_{i+1} - s_i} - \frac{s_i^{k+1} - s_{i-1}^{k+1}}{s_i - s_{i-1}} = \left(\frac{s_{i+1}^k - s_i^k}{s_{i+1} - s_i} - \frac{s_i^k - s_{i-1}^k}{s_i - s_{i-1}} \right) \cdot s_i + s_{i+1}^k - s_{i-1}^k.$$

Schließlich kann man $s_{i+1}^k - s_{i-1}^k$ durch Rekursion stabil auswerten:

$$s_{i+1}^k - s_{i-1}^k = (s_{i+1}^{k-1} - s_{i-1}^{k-1}) \cdot s_{i+1} + s_{i-1}^{k-1} \cdot (s_{i+1} - s_i).$$

Zusammenfassend erhält man mit den Abkürzungen

$$T_1(i, k) := \frac{s_{i+1}^k - s_i^k}{s_{i+1} - s_i} \quad \text{und} \\ T_2(i, k) := \frac{s_{i+1}^{k+1} - s_i^{k+1}}{s_{i+1} - s_i} - \frac{s_i^{k+1} - s_{i-1}^{k+1}}{s_i - s_{i-1}}$$

die Initialisierungen

$$T_1(i, 1) = s_{i+1} - s_{i-1},$$

$$T_2(i, 1) = (s_{i+1} + s_i) - (s_i + s_{i-1}) = T_1(i, 1) \quad \text{und}$$

$$a_{1,0} = \frac{1}{2} \cdot T_2(i, 1),$$

die mit hoher Genauigkeit ("double precision") ausgeführt werden sollten, und für $k \geq 2$ die Rekursionen

$$T_1(i, k) = T_1(i, k-1) s_{i+1} + T_1(i, 1) s_{i-1}^{k-1},$$

$$T_2(i, k) = T_2(i, k-1) s_i + T_1(i, k) \quad \text{und}$$

$$a_{1,k-1} = \frac{1}{k(k+1)} T_2(i, k).$$

Auf die explizite Angabe der Rekursion zur Berechnung von s_{i-1}^{k-1} wurde verzichtet.

Die obigen Formeln sind numerisch stabil. Falls s_{i-1} , s_i und s_{i+1} nämlich gleiches Vorzeichen haben, haben auch die zu addierenden Terme gleiches Vorzeichen. Ist jedoch $s_{i-1} < 0$ und $s_{i+1} > 0$, so tritt der Effekt der Auslöschung ohnehin nicht auf.

Damit ist eine Quadraturformel für eine feste Folge von Stützstellen $s_1 < s_2 < \dots < s_N$ stabil hergeleitet.

Leider erhält man beim Umsortieren der Fächerstrahlprojektionen nach φ für unterschiedliche Werte von φ auch unterschiedliche Stützstellenfolgen. Der Versuch jeweils eine andere, der Situation angepaßte Quadraturformel zu verwenden, scheiterte. Es wurden deutlich ausgeprägte Ringe im Bild erzeugt, die auf die Inkompatibilität der Formeln zurückzuführen sind.

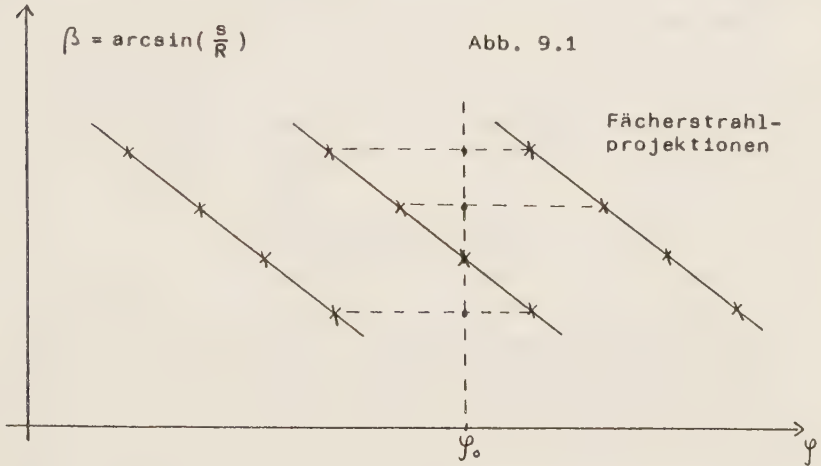
Da bei dem verwendeten Gerät die Schrittweite δ der Fokusbewegung ein ganzzahliges Vielfaches des Winkelabstandes zweier benachbarter Detektoren ist ($\delta = k \cdot \epsilon$), treten immer wieder die gleichen Stützstellenfolgen in einem Zyklus der Länge k auf. Durch Interpolation nach φ bei festem s können die Werte $g(s, \varphi)$ für sämtliche vorkommenden Stützstellen s_i und jedes φ approximiert werden. Die Anwendung einer gemeinsamen Quadraturformel ist dann möglich und führt zu guten Resultaten.

Aus Rechenzeitgründen ist freilich ein explizites Umsortieren der Fächerstrahlprojektionen bzw. die punktweise Interpolation nicht möglich. Man kann jedoch die Formeln zunächst unter Weglassung der zu interpolierenden Werte für jedes φ anwenden und anschließend durch eine gewichtete Summation benachbarter Teilergebnisse diese Interpolationen implizit nachholen.

Die Gewichte hängen dabei von der Art der Interpolation ab. Sie lauten bei linearer Interpolation

$$\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1, \frac{k-1}{k}, \dots, \frac{2}{k}, \frac{1}{k}.$$

Dies kann leicht nachgerechnet werden. Hier soll es lediglich anhand eines Beispiels graphisch veranschaulicht werden.



lineare Interpolation :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & : & & \\ & \frac{2}{3} & & & \frac{1}{3} \\ & : & & & : \\ \frac{1}{3} & & & & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$$

Gewichtung :

$$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}$$

Die Berechnung der Koeffizienten c_k erfolgt nun kanonisch nach den in § 6 angegebenen Formeln.

Die weiteren Integrationen über φ sind dabei zweckmäßigerweise mit einer Sehnentrapezregel durchzuführen, da diese neben ihrer Einfachheit auch von der Genauigkeit her für periodische und trigonometrische Funktionen bestens geeignet ist.

Wie die numerischen Erfahrungen (siehe § 10) zeigen, ist der Fehler der hier hergeleiteten Quadraturformel gegenüber dem Meßfehler vernachlässigbar. Das hier beschriebene Vorgehen ist also voll zufriedenstellend.

Kapitel IV : Numerische Ergebnisse

Im letzten Kapitel dieser Arbeit werden meine Erfahrungen bei der Erorobung des beschriebenen Algorithmus zur konsistenten Ergänzung von Lochprojektionen zusammengefaßt. Auf die Überprüfung der Relevanz der in § 5 angegebenen Konsistenzbedingungen, der gedanklichen Grundlage meines Vorgehens, in § 10, folgt in § 11 der Test des gesamten Ergänzungsverfahrens. § 12 beinhaltet neben der kritischen Würdigung der Ergebnisse einen Ausblick auf Weiterentwicklungsmöglichkeiten.

§ 10 Test der Konsistenzbedingungen

Ein idealer Meßdatensatz erfüllt die Konsistenzbedingungen a), b) und d) aus § 5 exakt. Umgekehrt folgt aus den Konsistenzbedingungen die Existenz eines Bildes mit derartigen Projektionsdaten. Daher liegt es bei Fehlen von Information, wie dies bei Lochprojektionen der Fall ist, nahe, die Ergänzung so durchzuführen, daß der vervollständigte Datensatz konsistent ist. Dies ist das Grundprinzip meines Verfahrens.

In diesem Paragraphen soll geklärt werden, inwieweit im Routinebetrieb gemessene Daten die genannten Forderungen erfüllen und welche Auswirkungen dabei Metallgegenstände zeigen.

Wie bereits in § 5 erwähnt, ist ausschließlich die Konsistenzbedingung d) von Interesse, da a) und b) in der hier untersuchten Situation automatisch erfüllt sind. Es besagt nämlich a), daß Strahlen, die das Meßobjekt nicht treffen, auch nicht abgeschwächt werden, während b) lediglich eine Formulierung des Prinzips vom umkehrbaren Strahlengang ist. Die Symmetriebedingung b) kann man leicht dahingehend umformulieren, daß

$$s_{m,n} := \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} s^m g(s, \varphi) \sin(n\varphi) \, ds \, d\varphi = 0 \quad \text{und}$$
$$c_{m,n} := \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} s^m g(s, \varphi) \cos(n\varphi) \, ds \, d\varphi = 0$$

für m und n verschiedener Parität gilt. Unter d) wurde gefordert, daß $s_{m,n} = c_{m,n} = 0$ für alle n und m mit $n > m \geq 0$ gilt.

Unbefriedigend in Bezug auf die Vergleichbarkeit inkonsistenter Datensätze ist hier, daß eine Drehung des Objektes bzw. eine Phasenverschiebung der Funktion g bezüglich des zweiten Argumentes unterschiedliche Koeffizienten $s_{m,n}$ und $c_{m,n}$ liefert. Daher werden sie hier nicht isoliert betrachtet, sondern der Ausdruck

$$a_{m,0} := \frac{1}{2\pi} |c_{m,0}| \quad \text{bzw.}$$

$$a_{m,n} := \frac{1}{\pi} \sqrt{s_{m,n}^2 + c_{m,n}^2} \quad \text{für } n > 0.$$

Dieser Term ist gegenüber Phasenverschiebung invariant, wie man für $n=0$ sofort sieht und für $n>0$ leicht nachrechnet:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{m,n} &:= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} s^m g(s, \varphi + \psi) \sin(n\psi) \, ds \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} s^m g(s, \varphi) \sin(n(\varphi - \psi)) \, ds \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} s^m g(s, \varphi) (\sin(n\varphi)\cos(n\psi) - \sin(n\psi)\cos(n\varphi)) \, ds \, d\varphi \\ &= s_{m,n} \cos(n\psi) - c_{m,n} \sin(n\psi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{m,n} &:= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} s^m g(s, \varphi + \psi) \cos(n\psi) \, ds \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} s^m g(s, \varphi) \cos(n(\varphi - \psi)) \, ds \, d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} s^m g(s, \varphi) (\cos(n\varphi)\cos(n\psi) + \sin(n\varphi)\sin(n\psi)) \, ds \, d\varphi \\
 &= s_{m,n} \sin(n\psi) + c_{m,n} \cos(n\psi) ,
 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \tilde{s}_{m,n}^2 + \tilde{c}_{m,n}^2 &= (s_{m,n} \cos(n\psi) - c_{m,n} \sin(n\psi))^2 + \\
 &\quad (s_{m,n} \sin(n\psi) + c_{m,n} \cos(n\psi))^2 \\
 &= s_{m,n}^2 \cos^2(n\psi) - 2 s_{m,n} \cos(n\psi) c_{m,n} \sin(n\psi) \\
 &\quad + c_{m,n}^2 \sin^2(n\psi) + \\
 &\quad s_{m,n}^2 \sin^2(n\psi) + 2 s_{m,n} \sin(n\psi) c_{m,n} \cos(n\psi) \\
 &\quad + c_{m,n}^2 \cos^2(n\psi) \\
 &= s_{m,n}^2 (\cos^2(n\psi) + \sin^2(n\psi)) + \\
 &\quad c_{m,n}^2 (\sin^2(n\psi) + \cos^2(n\psi)) \\
 &= s_{m,n}^2 + c_{m,n}^2 .
 \end{aligned}$$

Im Übrigen ist $a_{m,n}$ genau dann gleich 0, wenn sowohl $s_{m,n}$ als auch $c_{m,n}$ gleich 0 sind. Man erhält also eine neue Version der Konsistenzbedingungen b) und d) :

$a_{m,n} = 0$ für alle n und m unterschiedlicher Parität und
für alle n und m mit $n > m \geq 0$.

Betrachtet man die Funktion

$$\int_{\mathbb{R}} s^m g(s, \varphi) \, ds ,$$

so ergibt sich der Fourierkoeffizient von $\cos(n\varphi)$ zu

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} s^m g(s, \varphi) ds d\varphi \quad \text{für } n = 0 \text{ bzw.}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^2 \int_{\mathbb{R}} s^m g(s, \varphi) \cos(n\varphi) ds d\varphi \quad \text{für } n > 0.$$

Da man durch Phasenverschiebung immer erreichen kann, daß in der Fourierentwicklung der Sinusterm einer bestimmten Frequenz n gleich 0 wird, und in diesem Fall $a_{m,n}$ gerade der Betrag des soeben angegebenen Fourierkoeffizienten ist, ist es vernünftig, $a_{m,n}$ als Amplitude zur Frequenz n zu bezeichnen.

Die Koordinatensysteme der Zeichnungen auf den folgenden Seiten wurden diesen Vereinbarungen gemäß mit Frequenz und Amplitude beschriftet. Die Betrachtungen wurden für jeden polynomialen Grad m von 0 bis 5 durchgeführt.

Besonders schön kann man die Konsistenzbedingungen bei simulierten Daten erkennen. Für ein Schädelphantombild wurden die Projektionsdaten in der Standardgeometrie des Tomographen exakt berechnet. Abweichungen von den Konsistenzbedingungen sind also ausschließlich auf Fehler bei der numerischen Quadratur gemäß § 9 und die endliche Rechengenauigkeit zurückzuführen. Wie die erheblich schlechteren Ergebnisse bei echten Meßdaten zeigen, ist der Integrationsfehler vergleichsweise unbedeutend, die in § 9 gewählten Quadraturformeln also voll zufriedenstellend.

Ausgeschrieben bedeuten die Konsistenzbedingungen, daß nur in folgenden Fällen $a_{m,n} \neq 0$ sein sollte:

m	0	1	2	3	4	5	...
n	0	1	0,2	1,3	0,2,4	1,3,5	...

Beim Schädelphantom erkennt man deutlich die Spitzen bei den angegebenen Frequenzen (Abb. 10.1).

Für polynomialen Grad $m=0$ zum Beispiel darf lediglich $a_{m,n}$ von 0 verschieden sein, wenn $n=0$ ist. Beim Schädelphantom (Abb. 10.1) ist auch tatsächlich $a_{0,0}$ bei numerischer Ermittlung etwa um den Faktor 100000 größer als $a_{0,n}$ mit $n > 0$.

An dieser Stelle sei auf die logarithmische Skalierung der Ordinate hingewiesen, die auf Grund der enormen Größenunterschiede nötig war.

Zudem wurden zur Begrenzung des Zeichenfeldes keine Amplitudenwerte unter 10^{-2} dargestellt, und es wurden kleinere durch 10^{-2} substituiert.

Wenngleich Originaldatensätze durch Meßfehler die Konsistenzbedingungen nicht exakt erfüllen, so sind doch auch hier die Peaks an den vorhergesagten Frequenzen deutlich zu erkennen. Es wurde eine große Zahl von Versuchen durchgeführt, von denen hier eine repräsentative Auswahl wiedergegeben ist. Es fällt auf, daß die Abweichung von den Konsistenzbedingungen bei Schichten mit vorwiegend Weichteilen (Thorax, Abb. 10.2 und Abdomen, Abb. 10.3) erheblich geringer ausfällt, als bei Vorliegen massiver Knochenstrukturen (Schädel, Abb. 10.5 sowie 10.6 und Becken, Abb. 10.7).

Der Einfluß von Metallgegenständen auf die Werte $a_{m,n}$ kann dabei ganz beträchtlich sein, wie die Schädelmessungen (Abb. 10.5 und 10.6) demonstrieren. Dies veranlaßt zur Hoffnung, durch selektive Datenkorrektur eine deutliche Bildverbesserung erzielen zu können.

Andererseits können die Auswirkungen eines kleinen Metallgegenstandes auf die Konsistenzbedingungen auch sehr gering sein, wie das Beispiel eines Metallclips (Abb. 10.4) zeigt. Dennoch werden durch Metallclips teilweise sehr unangenehme streifenförmige Artefakte erzeugt. Dies liegt nicht an der Inkonsistenz, sondern am großen Dichteunterschied zur Umgebung und den dementsprechend großen Sprüngen zwischen den Projektionswerten, die zu numerischen Problemen führen.

Zur Verringerung solcher Artefakte kann man die übermäßig hohen Werte durch konsistente Ergänzung austauschen.

Die in den Abbildungen 10.1 bis 10.7 dargestellten numerischen Ergebnisse bestätigen also die theoretisch hergeleiteten Konsistenzbedingungen. Da durch Metallgegenstände erhebliche Abweichungen von den Konsistenzbedingungen verursacht werden, kann man mit einer deutlichen Verbesserung der Bildqualität durch konsistente Ergänzung bzw. durch konsistente Korrektur der Meßdaten rechnen.

Abb. 10.1

Überprüfung der Konsistenzbedingungen
Schädel - Phantom

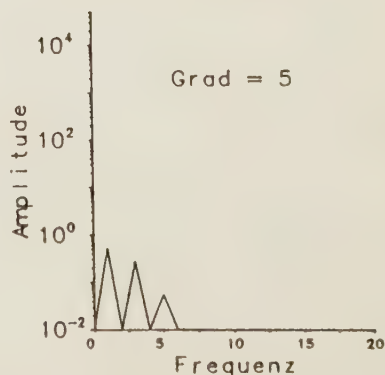
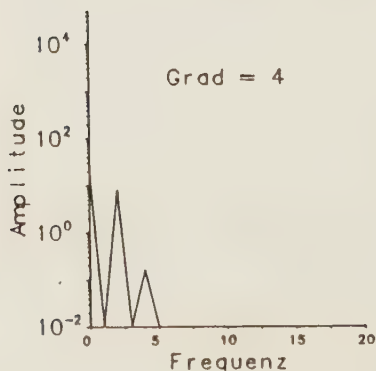
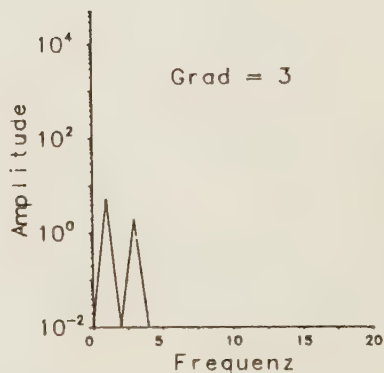
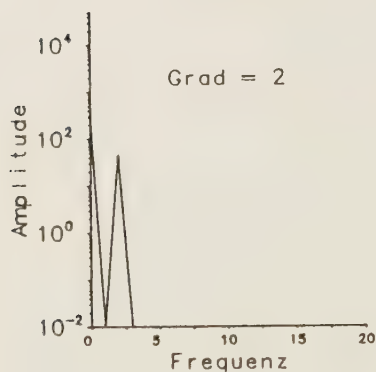
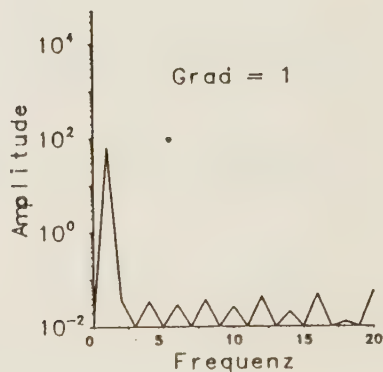
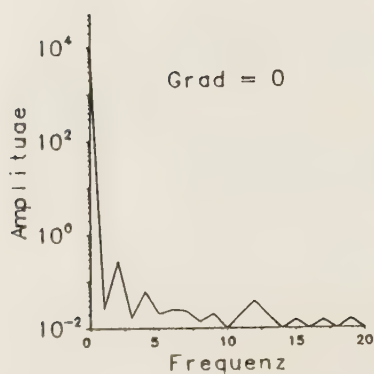


Abb. 10.2

Überprüfung der Konsistenzbedingungen
Thorax

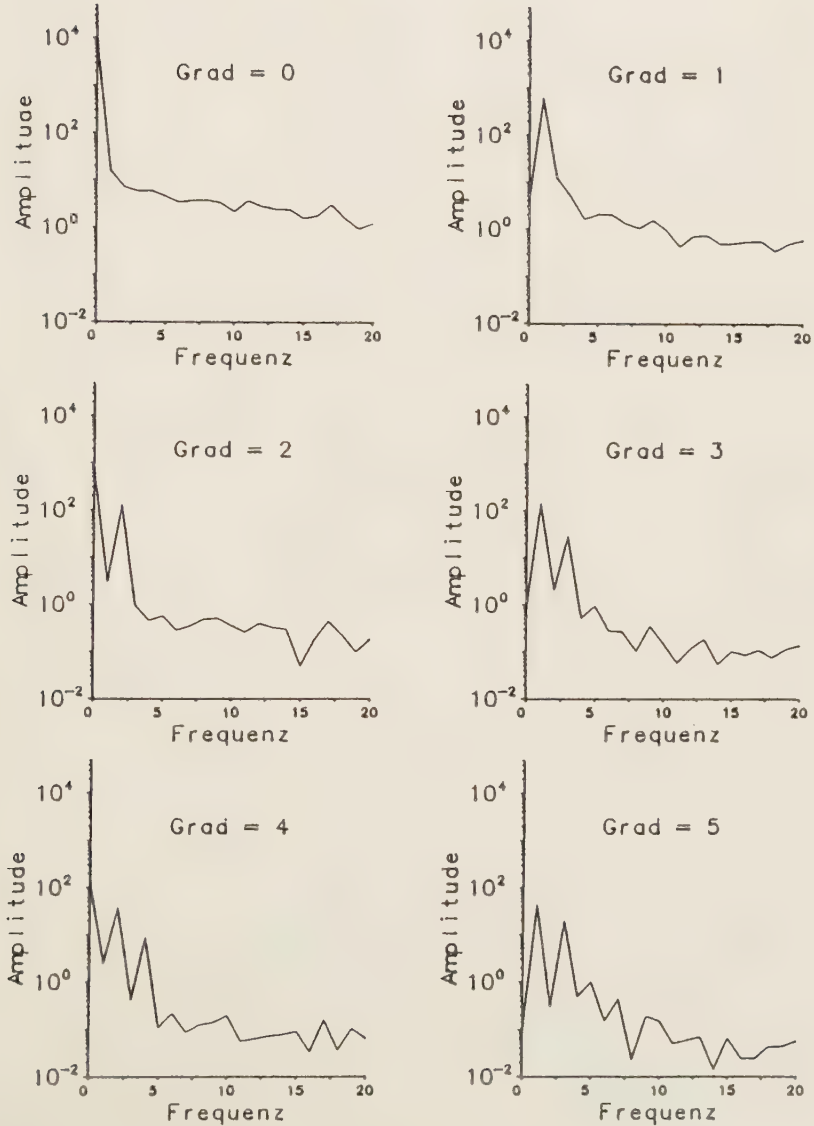


Abb. 10.3

Überprüfung der Konsistenzbedingungen
Abdomen mit Metallclip

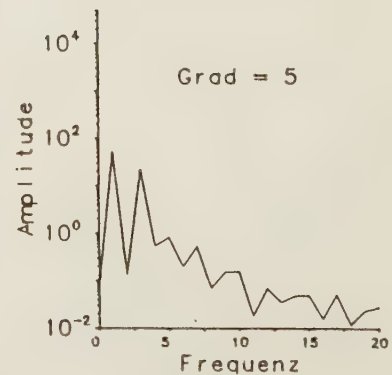
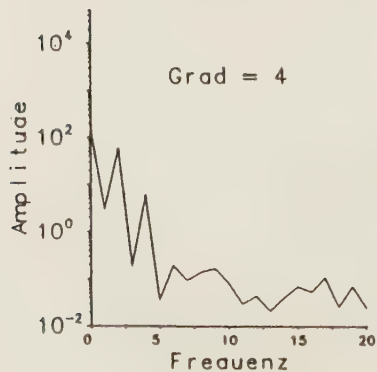
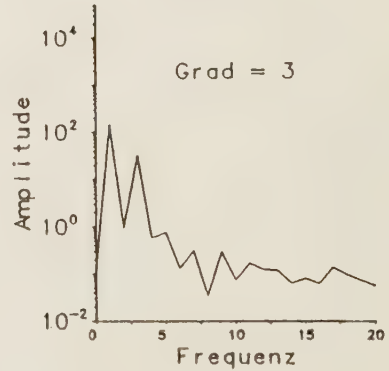
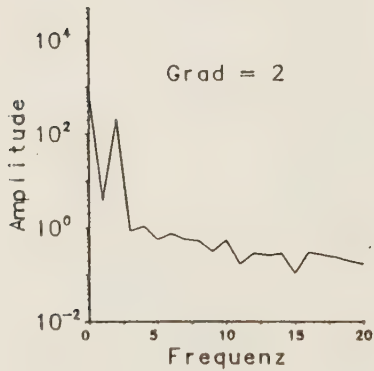
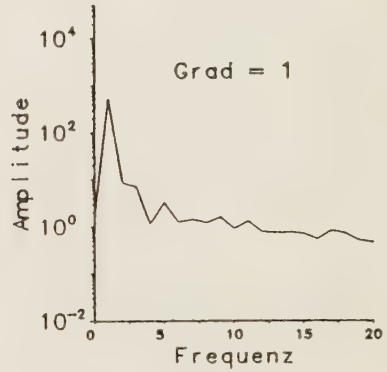
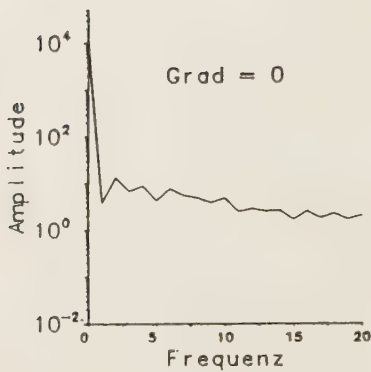


Abb. 10.4

Überprüfung der Konsistenzbedingungen
Bewegter Metallclip

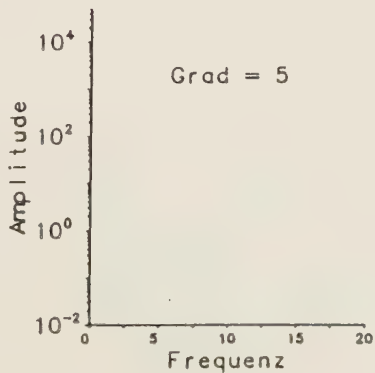
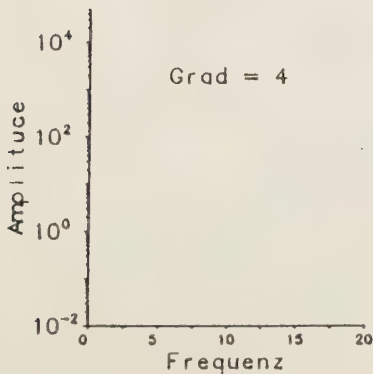
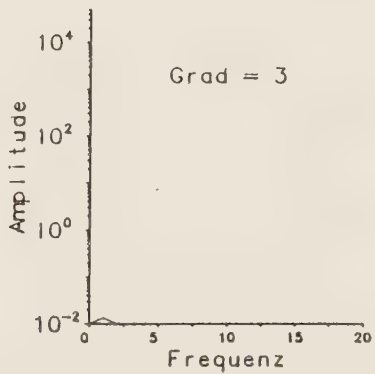
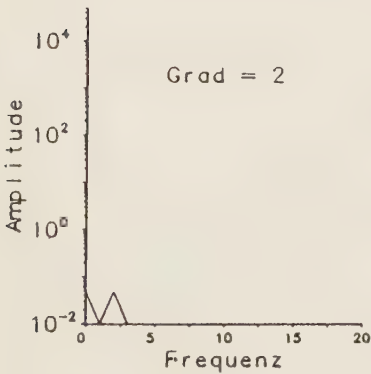
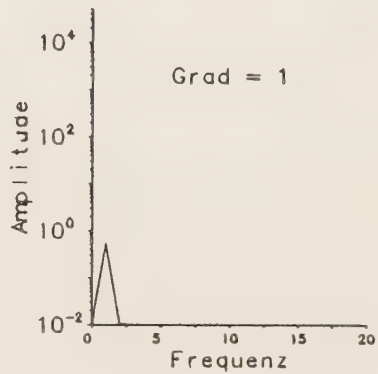
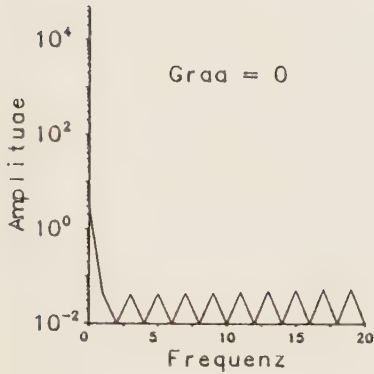


Abb. 10.5

Überprüfung der Konsistenzbedingungen
Schädel mit einer Metallkrone

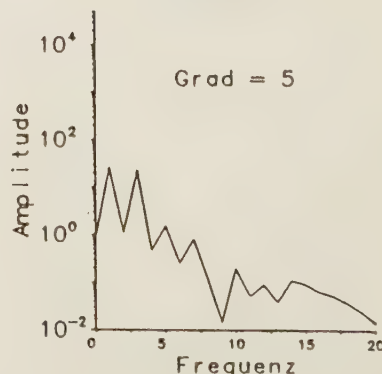
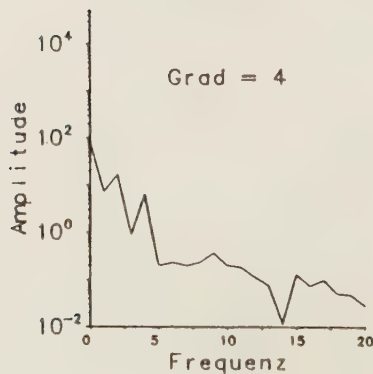
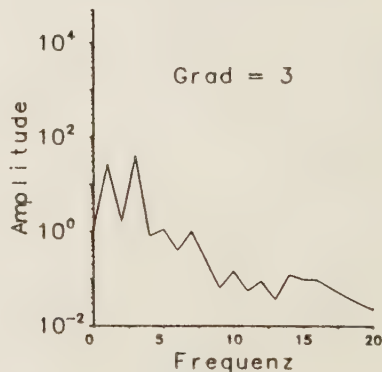
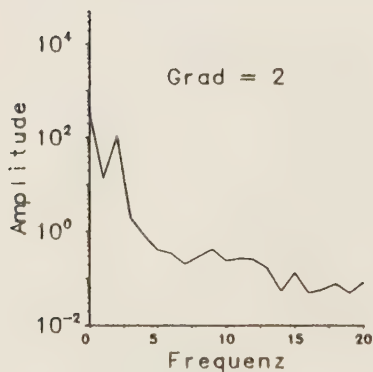
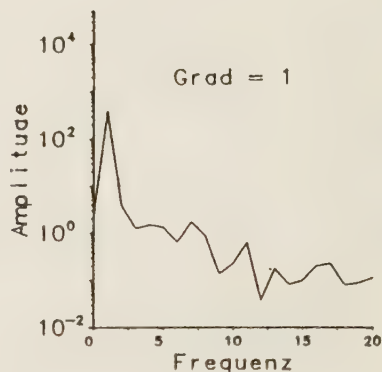
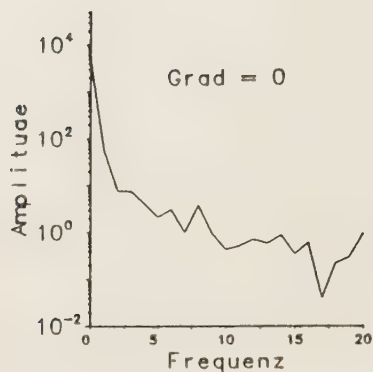


Abb. 10.6

Überprüfung der Konsistenzbedingungen
Schädel mit mehreren Metallkronen

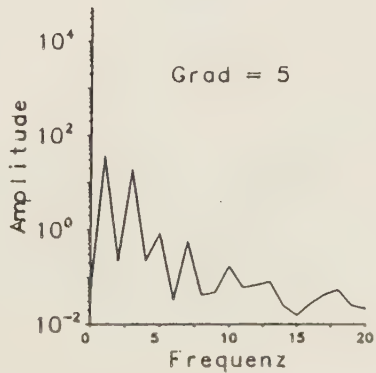
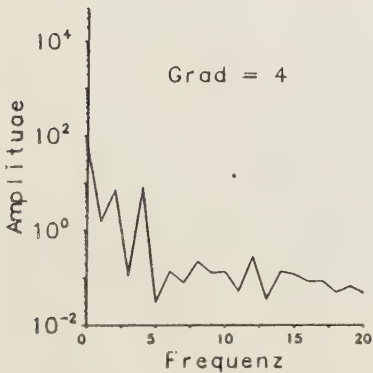
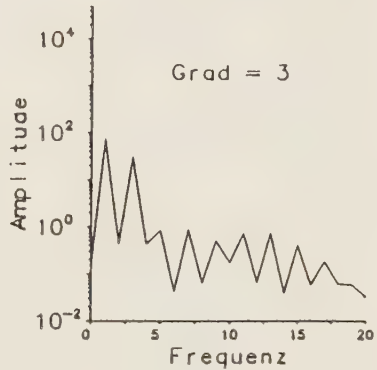
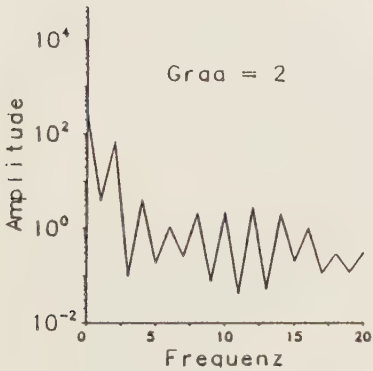
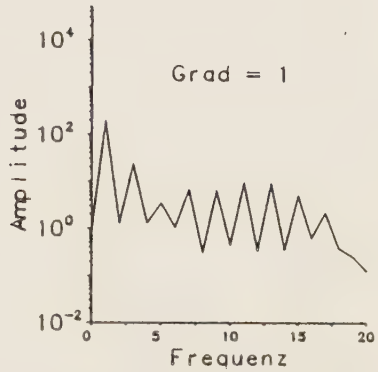
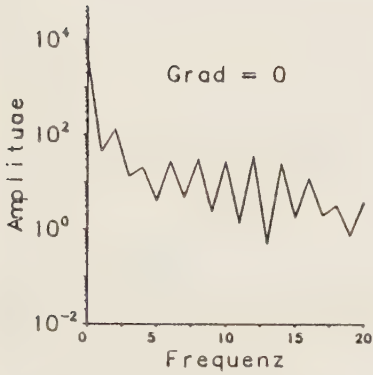
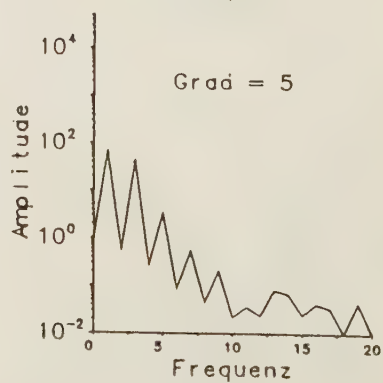
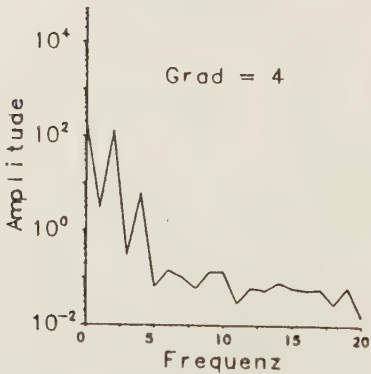
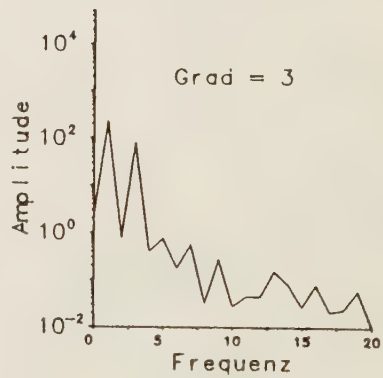
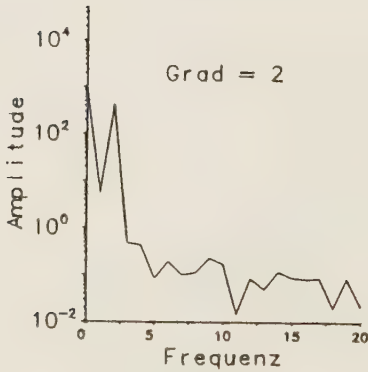
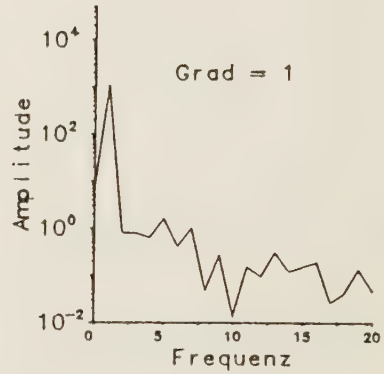
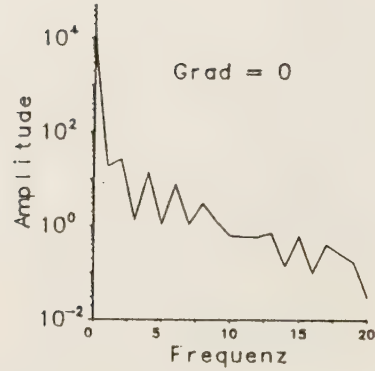


Abb. 10.7

Überprüfung der Konsistenzbedingungen
Becken



§ 11 Erprobung des Verfahrens

Der in Kapitel II und III beschriebene Algorithmus wurde auf einem Siemens-Computertomographen des Typs Somatom DR 3 implementiert. Darüberhinaus wurden Simulationen an der Cyber 175 des Leibniz Rechenzentrums München durchgeführt. Dieser Paragraph faßt die dabei gewonnenen Erfahrungen zusammen.

In § 3 wurde eine Liste wünschenswerter Eigenschaften für ein Verfahren zur Behandlung von Lochprojektionen angegeben. Nun soll geprüft werden, inwieweit die gesteckten Ziele erreicht wurden.

Als limitierende Faktoren gaben das geringe Speicherplatzangebot der PDP-11/44, des Basisrechners des Somatom DR 3, und die niedrig zu haltende Rechenzeit den Ausschlag für die Wahl eines indirekten Verfahrens, d.h. zuerst Ergänzung bzw. Korrektur der Meßdaten und anschließende Bildrekonstruktion mit einem Spezialprozessor. Eine Bildrekonstruktion mit einem Fortranprogramm würde auf der PDP-11/44 viele Stunden dauern. Da im Falle von Lochprojektionen noch dazu die Symmetrie der verfügbaren Meßdaten im Gegensatz zum vollständigen Datensatz fehlt, müßte man nochmals mit erheblich höheren Auswertzeiten rechnen.

Der in Kapitel II und III beschriebene Ergänzungsalgorithmus konnte soweit optimiert werden, daß ein Fortranprogramm zu seiner Durchführung je nach Größe des Datensatzes und des Metallgegenstandes auf der PDP-11/44 2 bis 5 Minuten benötigt. Erfahrungsgemäß kann man durch Programmierung in einer Assemblersprache bei großer Sorgfalt die Rechenzeit um den Faktor 10 verringern, d.h. man könnte mit ca. 20 Sekunden auskommen.

Da es gelungen ist, die Programme auf einer PDP-11/44 lauffähig zu machen, kann man auch sagen, daß der Aspekt des Speicherplatzbedarfs zufriedenstellend gelöst wurde.

Der Zugriff auf die Meßdaten erfolgte sequentiell. Dieser Datensatz wurde bei linearer Interpolation einmal von der Magnetplatte gelesen und sofort in modifizierter Form an der

selben Stelle geschrieben. Die konsistente Modifikation der Daten erfolgte sukzessive für jeden einzelnen polynomialen Grad k in aufsteigender Reihenfolge. Dabei wurden jeweils in einem ersten Lesevorgang die Koeffizienten $c_k(p)$ berechnet und vollständig im Zentralspeicher der PDP-11/44 gehalten, die anschließende Korrektur erfolgte durch einmaliges sequentielles Lesen und Schreiben.

Der so modifizierte Datensatz entspricht allen Anforderungen zur Bildrekonstruktion mit dem Spezialprozessor, der das Bild in wenigen Sekunden erzeugt. Viele Detailprobleme, die für die Standardrekonstruktion in jahrelanger Entwicklungsarbeit gelöst wurden, mußten somit nicht erneut aufgegriffen werden. Damit ist die Bildqualität dem Augenschein nach unverändert. Lediglich fälschlicherweise erzeugte Strukturen wurden entfernt, sodaß die tatsächlichen Bildkomponenten deutlicher zum Vorschein kommen. Das Ziel meiner Bemühungen war, jene Artefakte zu beseitigen, die vom Auge nicht unmittelbar als solche erkannt werden. Denn diese stellen die eigentliche Gefahr für die medizinische Diagnostik dar. Sie werden typischerweise durch die von Metallgegenständen hervorgerufene Strahlungsaufhäufung erzeugt. Daher ist der hier gewählte Ansatz der selektiven Datenkorrektur sinnvoll.

Es zeigte sich, daß es nicht vernünftig ist, den polynomialen Grad größer als 2 zu wählen. Im Falle kleiner Metallgegenstände sollte man sogar nicht über 1 gehen. Man erhält dann zufriedenstellende Ergebnisse ohne numerische Instabilität befürchten zu müssen.

Durch die geschickte Konstruktion der Ansatzräume mit Hilfe der in § 6 angegebenen Jacobipolynome erwies sich der Algorithmus als hinreichend flexibel zur Anwendung bei störenden Objekten beliebiger Lage und Form.

Es bleibt noch der Nachweis zu führen, daß das Verfahren Artefakte beseitigt und echte Strukturen hervorkehrt. Da der Algorithmus, wie bereits erwähnt, auf jene Artefakte abzielt, die als solche mit dem Auge nicht identifizierbar sind, kann man die Funktionstüchtigkeit lediglich anhand von Phantombildern, deren Komponenten man a priori kennt, nachweisen.

Der Einfachheit halber wurden kreisförmige Objekte unterschiedlicher Dichte zum Aufbau der Testbilder hergenommen. Aufgrund ihrer Form bei dreidimensionaler Darstellung (Abb. 11.1 und 11.9) werden sie hier als Zylinderphantome bezeichnet.

Die dazugehörigen Dichtefunktionen ergeben sich durch Superposition von Funktionen, die auf einem Kreis einen konstanten Wert annehmen und sonst identisch gleich 0 sind.

Zylinderphantom 1 :

Kreismittelpunkt	Kreisradius	Funktionswert
(0 , 0)	1	0.2
(- 0.5 , - 0.5)	0.1	0.4
(0.5 , 0)	0.2	0.8

Zylinderphantom 2 :

Kreismittelpunkt	Kreisradius	Funktionswert
(0 , 0)	1	0.2
(- 0.5 , - 0.5)	0.1	0.4
(0.3 , 0)	0.2	0.8

Der Computertomograph berechnet für jeden Bildpunkt einen Wert, der gemäß eines frei wählbaren Auswertungsintervalles in eine Graustufe auf dem Bildschirm umgesetzt wird. Außerhalb dieses Intervalles liegende Werte werden ganz weiß bzw. ganz dunkel dargestellt.

Dies wirft zwei Probleme auf. Zum einen ist es grundsätzlich sehr kostspielig, die Bilder in vernünftiger Qualität zu reproduzieren, und zum anderen gibt die Wahl des Auswertungsintervalles reichlich Möglichkeit zur Manipulation des Ergebnisses.

Da, wie oben erläutert, echte CT-Bilder ohnehin zum Funktionstest unbrauchbar sind, habe ich zusätzlich ein Simulationssystem auf der Cyber 175 des Leibniz-Rechenzentrums München

installiert, welches die Dichtewerte in einer dreidimensionalen Graphik gegen die ebenen Koordinaten aufträgt. Diese Zeichnungen sind am Ende dieses Paragraphen (Abb. 11.1 bis 11.16) zu finden.

Zur weiteren Verdeutlichung wurden auch Zeichnungen angefertigt, die nur die hintere Bildhälfte enthalten. Somit ist ein Blick ins Innere des Grauwertegebirges möglich.

Das Verfahren ist linear in folgendem Sinne. Liegen in einer Schicht viele Strukturen, so ergeben sich die Projektionswerte als Summe der Projektionswerte, die man bei Messung der einzelnen Objekte erhält. Ebenso ist es gleichgültig, ob man die konsistente Ergänzung für Bilder durchführt, die jeweils nur ein Objekt enthalten und die Einzelergebnisse zusammensetzt, oder den Algorithmus sogleich auf das zusammengesetzte Bild bzw. dessen Projektionsdaten anwendet. Daher kann man davon ausgehen, daß die hier verwendeten Testobjekte trotz ihrer Einfachheit einen durchaus repräsentativen Eindruck von der Funktionstüchtigkeit des Verfahrens vermitteln.

Zu Vergleichszwecken wurden zunächst die Originale (Abb. 11.1, 11.5, 11.9 und 11.13) und die Standardrekonstruktionen (Abb. 11.2, 11.6, 11.10 und 11.14) aus den vollständigen Datensätzen (Parallelstrahlgeometrie, $n\varphi = 100$ Richtungen, $n_r = 60$ Messungen je Richtung) auf einem 40×40 - Raster ($n_x = n_y = 40$) dargestellt. Zur Simulation eines massiven Metallgegenstandes wurden diejenigen Daten, bei denen der Meßstrahl einen zentral liegenden Kreis mit Radius $rad = 1/3$ (Phantom 1) bzw. $1/10$ (Phantom 2) trifft, "vergessen". Die fehlenden Werte wurden nun durch lineare Interpolation bzw. konsistente Ergänzung aufgefüllt.

Die anschließende Bildrekonstruktion wurde mit einem hochauflösenden Faltungsalgorithmus durchgeführt. Schließlich wurde am Ort des Metallgegenstandes der Dichtewert auf 0.2 gesetzt. Das Ergebnis nach linearer Interpolation (Abb. 11.3, 11.7, 11.11 und 11.15) mag man sich als Resultat bei

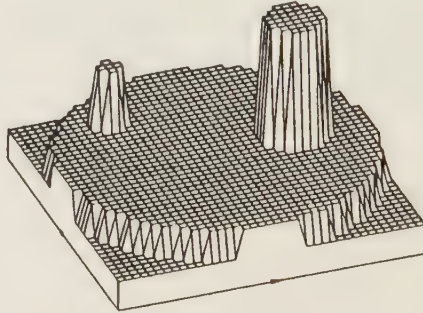
Vorliegen eines Metallgegenstandes vorstellen. Die Verbesserung der Bildqualität durch konsistente Ergänzung (Abb. 11.4, 11.8, 11.12 und 11.16) ist beträchtlich.

Diese Ergebnisse entsprechen den auf dem Computer - Tomographen gewonnenen Erfahrungen, obgleich hier weitaus weniger Projektionsdaten zur Simulation herangezogen wurden und die Rekonstruktion auf einem sehr groben Gitter erfolgte.

Damit ist die Funktionsfähigkeit zur Verringerung von Aufhärungsartefakten praktisch nachgewiesen.

Abb. 11.1

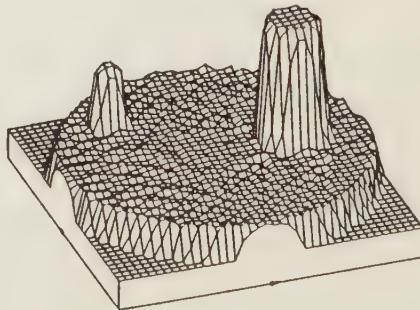
Zylinder - Phantom Nummer 1
Original



$n_x = 40$ $n_y = 40$

Abb. 11.2

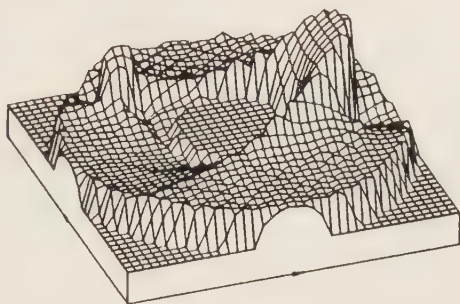
Zylinder - Phantom Nummer 1
Rekonstruktion aus vollständigen Daten
Hochauflösendes Filter



$n_x = 40$ $n_y = 40$ $n_\phi = 100$ $n_r = 60$
quadratisches Fehlermittel : $0.317E-01$

Abb. 11.3

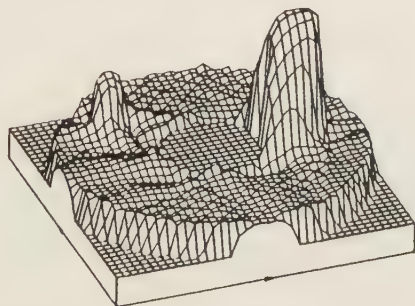
Zylinder - Phantom Nummer 1
Rekonstruktion aus Lochprojektionen
mit linearer Interpolation
Hochauflösendes Filter



rad = .33
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.110E+00

Abb. 11.4

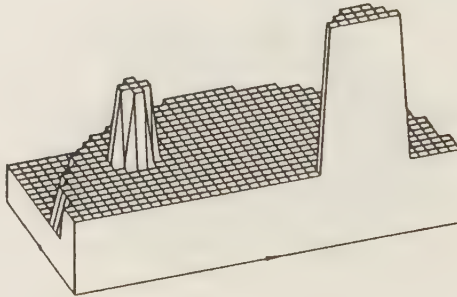
Zylinder - Phantom Nummer 1
Rekonstruktion aus Lochprojektionen
mit konsistenter Ergänzung
Hochauflösendes Filter



rad = .33 grad = 2
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.608E-01

Abb. 11.5

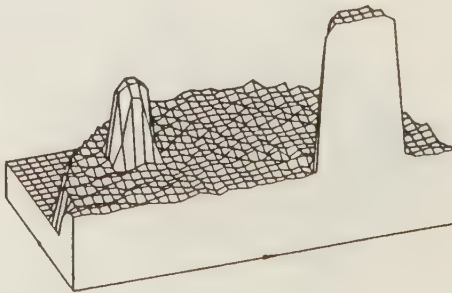
Zylinder - Phantom Nummer 1
Original



$n_x = 40$ $n_y = 40$

Abb. 11.6

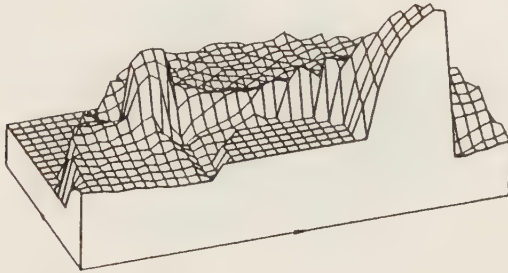
Zylinder - Phantom Nummer 1
Rekonstruktion aus vollständigen Daten
Hochauflösendes Filter



$n_x = 40$ $n_y = 40$ $n_\phi = 100$ $n_r = 60$
quadratisches Fehlermittel : 0.317E-01

Abb. 11.7

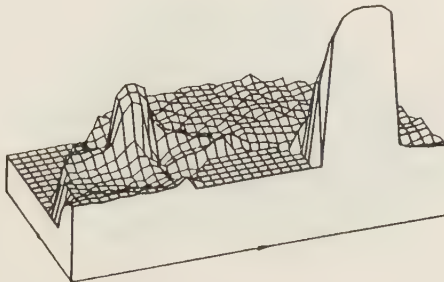
Zylinder - Phantom Nummer 1
Rekonstruktion aus Lochprojektionen
mit linearer Interpolation
Hochauflösendes Filter



rad = .33
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.110E+00

Abb. 11.8

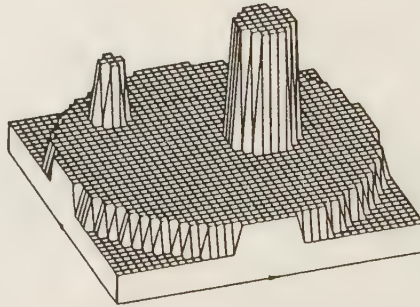
Zylinder - Phantom Nummer 1
Rekonstruktion aus Lochprojektionen
mit konsistenter Ergänzung
Hochauflösendes Filter



rad = .33 grad = 2
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.608E-01

Abb. 11.9

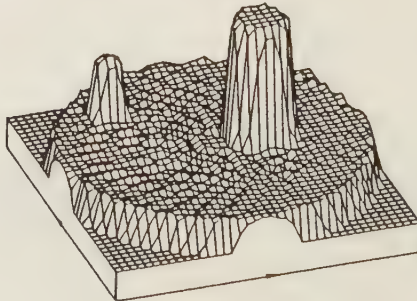
Zylinder - Phantom Nummer 2
Original



$n_x = 40$ $n_y = 40$

Abb. 11.10

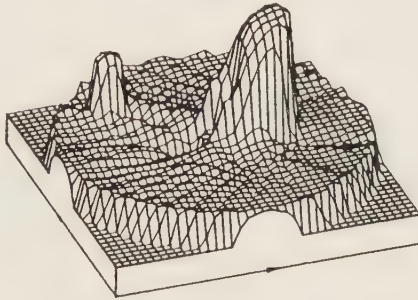
Zylinder - Phantom Nummer 2
Rekonstruktion aus vollständigen Daten
Hochauflösendes Filter



$n_x = 40$ $n_y = 40$ $n_\phi = 100$ $n_r = 60$
quadratisches Fehlermittel : $0.315E-01$

Abb. 11.11

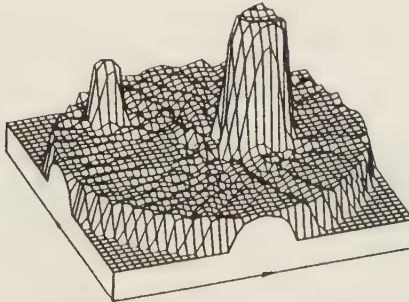
Zylinder - Phantom Nummer 2
Rekonstruktion aus Lochprojektionen
mit linearer Interpolation
Hochauflösendes Filter



rad = .10
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.607E-01

Abb. 11.12

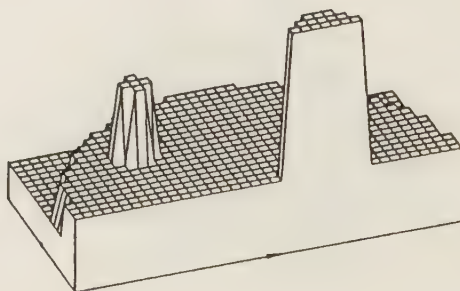
Zylinder - Phantom Nummer 2
Rekonstruktion aus Lochprojektionen
mit konsistenter Ergänzung
Hochauflösendes Filter



rad = .10 grad = 1
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.418E-01

Abb. 11.13

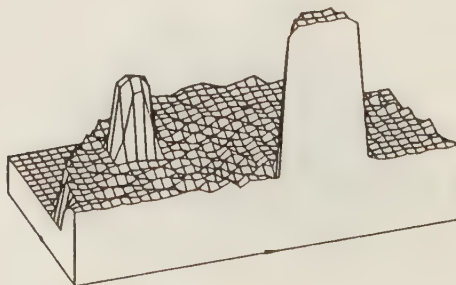
Zylinder - Phantom Nummer 2
Original



$n_x = 40$ $n_y = 40$

Abb. 11.14

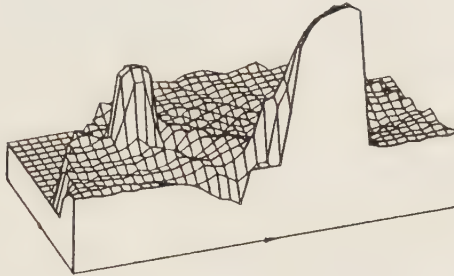
Zylinder - Phantom Nummer 2
Rekonstruktion aus vollständigen Daten
Hochauflösendes Filter



$n_x = 40$ $n_y = 40$ $n_\phi = 100$ $n_r = 60$
quadratisches Fehlermittel : 0.315E-01

Abb. 11.15

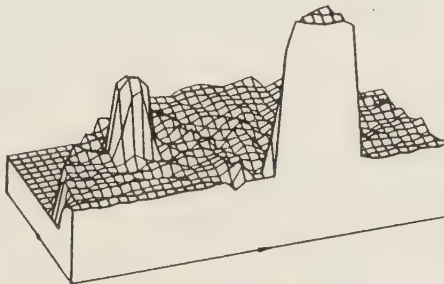
Zylinder - Phantom Nummer 2
Rekonstruktion aus Lochprojektionen
mit linearer Interpolation
Hochauflösendes Filter



rad = .10
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.607E-01

Abb. 11.16

Zylinder - Phantom Nummer 2
Rekonstruktion aus Lochprojektionen
mit konsistenter Ergänzung
Hochauflösendes Filter



rad = .10 grad = 1
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.418E-01

§ 12 Kritische Würdigung und Weiterentwicklungsmöglichkeiten

In diesem Paragraphen werden die in § 10 und § 11 dargestellten praktischen Ergebnisse kritisch betrachtet und ein Ausblick auf denkbare Verbesserungen des Verfahrens gegeben. Jedoch wird auch auf die prinzipiellen Probleme bei der Bildrekonstruktion aus Lochprojektionen hingewiesen.

In § 10 und § 11 wurde anhand numerischer Ergebnisse gezeigt, daß es möglich ist, durch konsistente Modifikation der von Metallgegenständen verfälschten Datensätze die Bildqualität zu verbessern.

Im Gegensatz zu vielfach versuchten elementaren Ansätzen richtet sich der hier beschriebene Algorithmus nicht gegen radial verlaufende Streifenartefakte, sondern gegen jene Artefakte, die vom Betrachter leicht mit realen Strukturen verwechselt werden können und damit eine wesentlich größere Gefahr für die medizinische Diagnostik sind.

Die Streifenartefakte sind dennoch störend und können in Einzelfällen das ganze Bild unbrauchbar machen. Dann hilft auch die konsistente Modifikation nicht weiter.

Es wäre also die Entwicklung eines Verfahrens wünschenswert, das die vom Metallgegenstand verfälschten Meßwerte so verändert, daß durch anschließende Anwendung des Faltungsalgorithmus ein weitgehend von Streifenartefakten freies Bild entsteht. Diese Veränderung kann zunächst ohne Rücksicht auf Konsistenz durchgeführt werden, d.h. es braucht kein Bild zu geben, dessen Projektionswerte mit dem verbesserten Datensatz übereinstimmen!

Denn eine anschließende konsistente Modifikation mit dem hier beschriebenen Algorithmus beseitigt die durch Inkonsistenz verursachten großflächigen Artefakte.

Es ist auch an eine Veränderung des Faltungsalgorithmus oder sogar der Meßgeometrie zur Verringerung der Streifenartefakte zu denken.

Allerdings sollte man keine zu hohen Erwartungen haben, denn die Bildrekonstruktion aus Lochprojektionen ist im mathematischen Sinne "unstetig", d.h. anschaulich: geringste Änderungen der Projektionswerte können beliebig große Veränderungen des dazugehörigen Bildes nach sich ziehen. Lediglich die a priori - Information, daß die in der Medizin auftretenden Schichtbilder nicht beliebig chaotisch sind, macht eine Bildrekonstruktion aus Lochprojektionen überhaupt möglich.

Dieses Problem ist prinzipieller Art und vom Rekonstruktionsverfahren unabhängig. Hier wird obige a priori - Information durch die Wahl eines nicht zu großen polynomialen Ansatzraumgrades eingebracht (z.B. grad = 2 in Abb. 11.4 und 11.8).

Es wurde praktisch nachgewiesen, daß das hier entwickelte Verfahren zur Verringerung großflächiger Artefakte, die vom Betrachter nicht von realen Strukturen zu unterscheiden sind und damit für die Diagnostik gefährlich werden können, geeignet ist. Es zeichnet sich durch geringen Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf, weitgehend sequentiellen Speicherzugriff, numerische Stabilität und Allgemeinheit in Bezug auf Lage und Form der störenden Objekte aus.

Zusammenfassung

In der Computer - Tomographie werden zweidimensionale Schichtbilder aus einer Serie von Messungen errechnet, bei denen der Körper in einer Vielzahl von Richtungen von Röntgenstrahlen durchdrungen wird und durch die Abschwächung der Strahlen indirekt Auskunft über die vorliegenden Dichteverhältnisse gibt.

Befinden sich Metallgegenstände in der untersuchten Schicht, so werden die betreffenden Meßwerte gestört oder gänzlich unbrauchbar. In diesem Fall spricht man von Lochprojektionen. Bei direkter Anwendung eines Standardrekonstruktionsverfahrens auf solche Daten entstehen Artefakte zweierlei Art. Zum einen streifenförmige, die man leicht von realen Strukturen unterscheiden kann, und zum anderen großflächige, die vom Betrachter nicht mehr als Artefakt identifizierbar sind. Letztere stellen eine ernsthafte Gefahr für die medizinische Diagnostik dar.

Gegen derartige Artefakte richtet sich das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren. Sein Grundgedanke ist die konsistente Ergänzung der Datensätze gemäß den erstmals von Ludwig im Jahre 1966 angegebenen Bedingungen.

Der Algorithmus wurde so konzipiert, daß er auch auf einem kleinen Computer lauffähig ist und trotz geringer Rechenzeit brauchbare Resultate liefert. Seine Funktionstüchtigkeit wurde sowohl auf einem kommerziellen Computer - Tomographen (Somatom DR 3 der Firma Siemens) als auch in der Simulation auf einem Großrechner (Cyber 175 des Leibniz - Rechenzentrums München) nachgewiesen.

Literatur

1. Bartmann, A. : Hohle und beschnittene Projektionen in der Computer - Tomographie.
Diplomarbeit an der Fakultät für Mathematik der Ludwig - Maximilians - Universität München, Januar 1983.
2. Cormack, A.M. : Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications.
J. Appl. Phys. 34 (1963), 2722 - 2727.
3. Cormack, A.M. : Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. II.
J. Appl. Phys. 35 (1964), 2908 - 2913.
4. Grünbaum, F.A. : A study of Fourier space methods for "limited angle" reconstruction.
Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 2 (1980), 31 - 42.
5. Hamaker, C., Smith, K.T., Solmon, D.C., Wagner, S.L. :
The divergent beam X - ray transform.
Rocky Mountain J. of Math. 10 (1980), 253 - 283.
6. Helgason, S. : The Radon transform on Euclidean spaces, compact two - point homogeneous spaces and Grassmann manifolds.
Acta Math. 113 (1965), 153 - 180.
7. Helgason, S. : The Radon transform.
Birkhäuser, Progress in Mathematics 5 (1980).
8. Herman, G.T. : Image reconstruction from projections.
The fundamentals of computerized tomography.
Academic Press, 1980.
9. Herman, G.T., Naparstek, A. : Fast image reconstruction based on a Radon inversion formula appropriate for rapidly collected data.
SIAM J. Appl. Math. 33 (1977), 511 - 533.
10. Lerche, I., Zeitler, E. : Projections, reconstructions and orthogonal functions.
J. Math. Anal. Appl. 56 (1976), 634 - 649.

11. Lewitt, R.M. : Ultra - fast convolution approximations for computerized tomography.
IEEE Trans. Nucl. Sci. 26 (1979), 2678 - 2681.
12. Lewitt, R.M., Bates, R.H.T. : Image reconstruction from projections I : General theoretical considerations.
Optik 50 (1978), 19 - 33.
13. Lewitt, R.M., Bates, R.H.T. : Image reconstruction from projections II : Modified back - projection methods.
Optik 50 (1978), 85 - 109.
14. Lewitt, R.M., Bates, R.H.T. : Image reconstruction from projections III : Projection completion methods (theory).
Optik 50 (1978), 189 - 204.
15. Lewitt, R.M., Bates, R.H.T. : Image reconstruction from projections IV : Projection completion methods (computational examples).
Optik 50 (1978), 269 - 278.
16. Lions, J.L., Magenes, E. : Non - homogeneous boundary value problems and applications I.
Springer, 1972.
17. Louis, A. : Picture reconstruction from projections in restricted range.
Math. Meth. in the Appl. Sci. 2 (1980), 209 - 220.
18. Louis, A. : Numerische Rekonstruktion von Bildern bei unvollständigen Daten.
ZAMM 60 (1980), T 301 - T 303.
19. Ludwig, D. : The Radon transform on Euclidean space.
Comm. Pure Appl. Math. 19 (1966), 49 - 81.
20. Natterer, F. : A Sobolev space analysis of picture reconstruction.
SIAM J. Appl. Math. 39 (1980), 402 - 411.
21. Natterer, F. : Efficient implementation of 'optimal' algorithms in computerized tomography.
Math. Meth. in the Appl. Sci. 2 (1980), 545 - 555.

22. Natterer, F. : Genauigkeitsfragen bei der numerischen
Rekonstruktion von Bildern.
ISNM 49, Birkhäuser, 1979, 131 - 146.
23. Perry, R.M. : On reconstructing a function on the
exterior of a disk from its Radon transform.
J. Math. Anal. Appl. 59 (1977), 324 - 341.
24. Polya, G., Szegő, G. : Aufgaben und Lehrsätze aus
der Analysis II.
Springer, 1971.
25. Radon, J. : Über die Bestimmung von Funktionen durch
ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten.
Ber. Sächs. Akad. Wiss. 69 (1917), 262 - 277.
26. Rudin, W. : Real and complex analysis.
Tata Mc Graw Hill, 1981.
27. Ramachandran, G.N., Lakshminarayanan, A.V. : Three -
dimensional reconstruction from radiography and
electron micrographs: Application of convolutions
instead of Fourier transforms.
Proc. Nat. Acad. Sci. USA 68 (1971), 2236 - 2240.
28. Shepp, L.A., Kruskal, J.B. : Computerized tomography :
The new medical X - ray technology.
Amer. Math. Monthly 85 (1978), 420 - 439.
29. Smith, K.T., Solmon, D.C., Wagner, S.L. : Practical
and mathematical aspects of the problem of reconstructing
objects from radiographs.
Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 1227 - 1270.
30. Triebel, H. : Interpolation theory, function spaces,
differential operators.
North Holland Publishing Company, 1978.
31. Weidmann, J. : Linear operators in Hilbert spaces.
Springer, 1980.

Lebenslauf

Alexander Bartmann, geboren am 25. November 1959 in München

Eltern : Dr. med. Willy und Dr. med. Sigrid Bartmann

Schulbildung in München :

Grundschule an der Farinellistraße 1966 - 1970

Oskar von Miller - Gymnasium 1970 - 1979

Abitur Juni 1979

Studium an der Ludwig Maximilians - Universität in München :

Mathematik 1980 - 1983

Vordiplom April 1981

Diplom März 1983

Zahnheilkunde 1979 - 1985

naturwissenschaftliche Vorprüfung Oktober 1980

zahnärztliche Vorprüfung April 1982

Staatsexamen Januar 1985

